

Výukový manuál

Dynamika – školení pro pokročilé

Všechny informace uvedené v tomto dokumentu mohou být změněny bez předchozího upozornění. Žádnou část tohoto dokumentu není dovoleno reprodukovat, uložit do databáze nebo systému pro načítání ani publikovat, a to v žádné podobě a žádným způsobem, elektronicky, mechanicky, tiskem, fotografickou cestou, na mikrofilmu ani jinými prostředky bez předchozího písemného souhlasu vydavatele. Firma Scia nezodpovídá za žádné přímé ani nepřímé škody vzniklé v důsledku nepřesností v dokumentaci nebo softwaru.

© Copyright 2010 Scia Group nv. Všechna práva vyhrazena.

Školení pro pokročilé

Dynamika

Scia Engineer 2010.1

Obsah

	Školení pro pokročilé.....	3
1.	Úvod	2
2.	Volné kmitání: Vlastní frekvence	4
	2.1 Teorie	4
	2.2 Vlastní frekvence v programu Scia Engineer	5
	2.3 Rámy	19
	2.4 Desky	36
3.	Vynucené kmitání: Harmonické zatížení.....	43
	3.1 Teorie	43
	3.2 Harmonické zatížení ve Scia Engineer	45
4.	Spektrální analýza: Seizmické zatížení	64
	4.1 Teorie	64
	4.2 Seizmické zatížení v Scia Engineer	66
5.	Tlumení:	89
	5.1 Teorie	89
	5.2 Tlumení ve Scia Engineer	91
6.	Vortex Shedding: Kármánovo kmitání.....	117
	6.1 Teorie	117
	6.2 Kármánovo kmitání v programu Scia Engineer	119
7.	Odkazy.....	5
8.	Příloha A: Velikost zemětřesení	6
9.	Příloha B: Numerické hodnoty tlumení.....	7

Release: SCIA Engineer 2010.1.400

Revize: 09/2008

Kanceláře SCIA

SCIA Group n.v.
Scientific Application Group
Industrieweg 1007 B-3540 Herk-de-Stad (Belgie)
Tel.(+32) (0)13/55 17 75 Fax.(+32) (0)13/55 41 75
Email: info@scia.be
Web: <http://www.scia-online.com>

SCIA sarl
Parc Club des Prés
Rue Papin, 29 - F-59650 Villeneuve d'Asq (Francie)
Tel.(+33) (0) 3.20.04.10.60 Fax.(+33) (0)
3.20.04.03.36
Email: info@scia.be
Web: <http://www.scia-online.com>

SCIA CZ, s.r.o.
Slavíčková 1a – CZ-638 00 Brno (Česká republika)
Tel.(+420) 545193526 Fax.(+420) 545193533
Email: info@scia.cz
Web: <http://www.scia.cz>

SCIA SK, s.r.o.
Nám. Hrdinův 5 – SK-010 03 Žilina (Slovensko)
Tel.(+421) 041-5003070-2 Fax.(+421) 041-5003072
Email: info@scia.sk
Web: <http://www.sciask.com>

Partneři SCIA

SCIA Software Gbr
Emil-Figge-Strasse 76 – D44227 Dortmund
(Německo)
Tel.(+49) 0231 / 9742586 Fax. (+49) 0231 / 9742587
Email: info@scia.de
Web: <http://www.scia.de>

SCIA W+B Software b.v.
Postbus 30119
6803 AC ARNHEM (Nizozemí)
Tel (+31) (0) 26 – 3201230 Fax (+31) (0) 26 -
3201239
Email: info@scia.nl
Web: <http://www.scia-online.com>

SCIA MAPS s.a.
Avenue de la Gare 4 – CH-1700 Fribourg
(Švýcarsko)
Tel (+41) (0) 26 341 – 7411 Fax (+41) (0) 26 341
7413
Email: info@scia-maps.ch
Web: <http://www.scia-online.com>

SCIA CZ, s.r.o.
Thákurova 3 – CZ-160 00 Praha (Česká republika)
Tel.(+420) 224322425 Fax.(+420) 224322425
Email: info@scia.cz
Web: <http://www.scia.cz>

SCIA Datenservice Ges.m.b.H.
Linzer Strasse 369/6 – A-1140 Wien (Rakousko)
Tel.(+43) 01 7433232-11 Fax.(+43) 01 7433232-20
Email: info@scia.at
Web: <http://www.scia-online.com>

1. Úvod

Dynamické výpočty nejsou ve stavební praxi tak časté jako výpočty statické. Na druhou stranu jsou u některých projektů nevyhnutelné. Účinky větru na výškové budovy, příčné kmitání stožárů a komínů, konstrukce umístěné v seizmických oblastech atd.

Scia Engineer obsahuje speciální moduly, které pokrývají běžné dynamické problémy. V tomto školení budou detailně probrány různé možnosti těchto modulů.

V první řadě se podíváme na základ dynamických výpočtů: výpočet vlastní frekvence. Vlastní frekvence představují základ pro všechny typy dynamických výpočtů.

Ve třetí kapitole bude výpočet vlastní frekvence rozšířen o harmonická zatížení: vliv vibrací např. od strojního vybavení lze spočítat pomocí základních principů dynamiky.

Dvě kapitoly se věnují seizmickým výpočtům a vlivu tlumení na účinky zemětřesení. Poslední kapitola pak popisuje problém Kármánových kmitů při výpočtu komínů.

Všechny kapitoly jsou doprovázeny příklady. Záměrně byly vybrány relativně jednoduché úlohy, na kterých lze jednoduše pochopit, k čemu vlastně při dynamických výpočtech dochází. Téměř všechny výpočty byly ověřeny ručním výpočtem, aby tak čtenář získal dobrý náhled na praktické aplikování teorie v programu.

Jakmile jsou principy jednou pochopeny, lze je snadno aplikovat i na složitě konstrukce.

Příklady lze nalézt na doprovodném CD, kde byly rozděleny do dvou skupin:

Úvodní projekty:

Projekty bez zadání pro dynamiku. Tyto projekty se používají v rámci školení.

Konečné projekty:

Projekty obsahují kompletní dynamické výpočty a představují tak konečné výsledky, ke kterým se dostanete na konci školení.

Poznámka: Pokud máte zájem o doprovodné CD, kontaktujte prosím oddělení technické podpory firmy SCIA CZ.

2. Volné kmitání: Vlastní frekvence

V této kapitole je podrobně vysvětlen výpočet vlastních frekvencí v programu Scia Engineer.

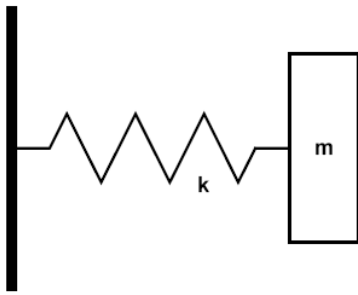
Vlastní frekvence mohou být vyžadovány k ověření kritérií pro budovy, k analýze větrem vyvolané rezonance u mostů, ke kontrole požadavků u citlivého vybavení apod.

Nejprve se podíváme na teorii výpočtu a názorně ji ukážeme na příkladu. Postup pak lze použít jak pro rámové, tak deskové konstrukce. Výsledky příkladů jsou porovnány s ručním výpočtem, aby mohly být lépe pochopeny aplikované principy.

2.1 Teorie

Abychom pochopili, co se děje při dynamické analýze složité konstrukce složené z konečných prvků, probereme si podrobně volné kmitání systému s jedním stupněm volnosti. Úplný přehled lze najít v [1].

Uvažujme systém podle obrázku:



Těleso o hmotnosti m se může v jednom směru volně pohybovat. Pružina o konstantní tuhosti k připevněná k tělesu je na svém druhém konci vetknutá.

Pohybovou rovnici lze zapsat ve tvaru:

$$m \cdot \ddot{y}(t) + k \cdot y(t) = 0 \quad (2.1)$$

Řešení této diferenciální rovnice je: $y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$

Dosazením do (2.1) dostaneme:

$$(-m \cdot \omega^2 + k) \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) = 0 \quad (2.2)$$

Z toho vyplývá:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.3)$$

Kde ω se nazývá vlastní kruhovou frekvencí.

Vlastní perioda T se zapíše:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.4)$$

Vlastní frekvence f pak lze zapsat:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.5)$$

Pro obecnou konstrukci s více stupni volnosti se rovnice (2.1) napíše v maticovém zápisu:

$$M \cdot \ddot{U} + K \cdot U = 0 \quad (2.6)$$

Kde:

U je vektor uzlových posunů a rotací,

..

U je vektor odpovídajících zrychlení,

K je matice tuhosti sestavená pro statický výpočet,

M je matice hmotnosti sestavená v průběhu dynamického výpočtu.

Z této rovnice je zřejmé, že výpočtový model vytvořený pro statickou analýzu musí být doplněn o další údaje: hmoty.

Řešením rovnice (2.6) jsou harmonické funkce času. Možné řešení může mít následující tvar:

$$U = \Phi \cdot \sin(\omega \cdot (T - T_0)) \quad (2.7)$$

Povšimněte si, že v tomto řešení je dosaženo oddělení proměnných:

- První část, (Φ) , je funkcí prostorových souřadnic,
- druhá část, $\sin(\omega \cdot (T - T_0))$, je funkcí času.

Po dosazení (2.7) do (2.6) dostaneme rovnici, která je známá jako **rovnice zobecněného problému vlastních čísel**.

$$K \cdot \Phi - \omega^2 \cdot M \cdot \Phi = 0 \quad (2.8)$$

Řešení soustavy (2.8) vede na tolik vlastních tvarů, kolik je rovnic.

Každý vlastní tvar sestává ze dvou složek:

- vlastního čísla: hodnota ω_i
- vlastního vektoru: vektor ϕ_i , který není plně určen. Tvar deformace je znám, ale měřítko známo není.

Toto měřítko lze zvolit několika způsoby, což bude vysvětleno v příštím odstavci.

Přehled matematických (maticových) metod skrytých za výpočtem vlastních čísel a vlastních vektorů je podán v [25].

2.2 Vlastní frekvence v programu Scia Engineer

V programu Scia Engineer byla jako měřítko implementována **M-ortonormalizace**. Ta je ukázána v následujícím vzorci:

$$\Phi_i^T \cdot M \cdot \Phi_i = 1 \quad (2.9)$$

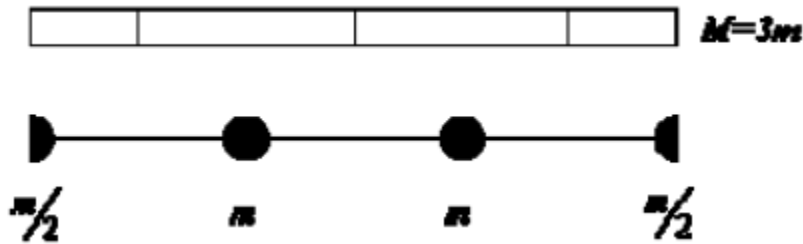
Některé charakteristické rysy M-ortonormalizace jsou:

$$\Phi_j^T \cdot M \cdot \Phi_i = 0, \text{ kde } i \neq j \quad (2.10)$$

$$\Phi_i^T \cdot K \cdot \Phi_i = \omega_i^2 \quad (2.11)$$

Matice M může být sestavena různými způsoby: Scia Engineer používá pro matici M tzv. maticovou reprezentaci soustředěných hmot. Matice soustředěných hmot nabízí významné výhody ve vztahu k využití paměti a výpočtové náročnosti, protože v daném případě je matice M diagonální maticí.

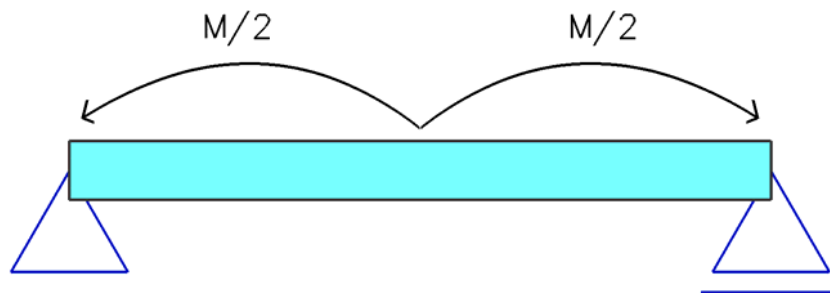
Hmoty jsou tak zavedeny do uzlů sítě konečných prvků. Princip je ukázán na následujícím obrázku [28]:



Výpočet vlastních tvarů a vlastních frekvencí se tak odehrává na diskretizovaném konečněprvkovém modelu konstrukce. To znamená, že namísto obecné konstrukce s nekonečným počtem stupňů volnosti je analyzován výpočetní model s konečným počtem stupňů volnosti.

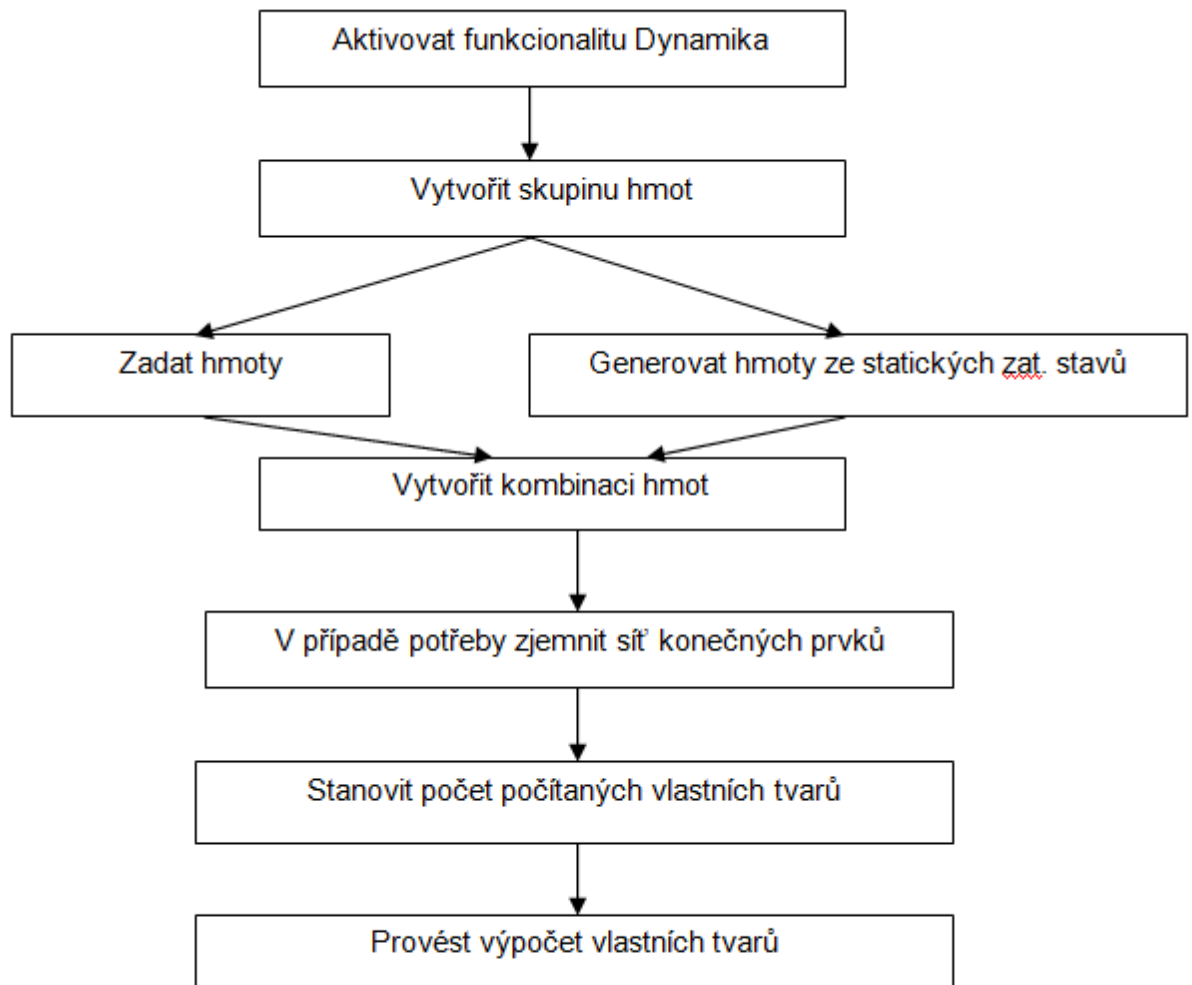
Počet stupňů volnosti lze obecně určit jednoduchým násobením: počet uzlů sítě se vynásobí počtem možných přemístění v uzlu. Je důležité si uvědomit, že přesnost modelu je přímo úměrná „přesnosti diskretizace“, tj. počtu prvků sítě konečných prvků. Tato jemnost nemá (často) ve statických úlohách téměř žádný praktický význam. Naopak v dynamických a nelineárních úlohách významně ovlivňuje přesnost výsledků.

Uvažujme příklad podle obrázku: Nosník na dvou podporách je zatížen vlastní tíhou. Výchozí nastavení (pro statický výpočet) generuje na celém nosníku pouze jediný konečný prvek. To znamená, že hmota nosníku M bude rozdělena do dvou konců nosníku, protože ty odpovídají uzlům konečněprvkové sítě.



V tom případě bude veškerá hmota umístěna do podpor a nezbude žádná hmota, která by mohla kmitat. Dynamický výpočet nebude možné provést. Z toho plyne, že v daném případě je potřeba provést zjemnění sítě, abychom vůbec dostali nějaké výsledky.

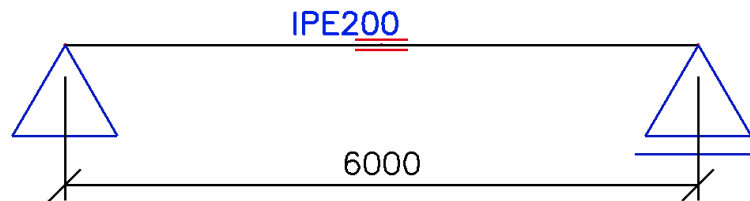
Následující diagram ukazuje kroky potřebné k provedení výpočtu vlastního kmitání.



Analogie mezi statickým a dynamickým výpočtem je zřejmá: ve statickém výpočtu se **zatížení** sdružují do **zatěžovacích stavů** a zatěžovací stavy se použijí v kombinacích. V dynamickém výpočtu se **hmoty** sdružují do **skupin hmot** a skupiny hmot se použijí v **kombinacích hmot**. Uvedený diagram je prakticky ilustrován v následujícím příkladu.

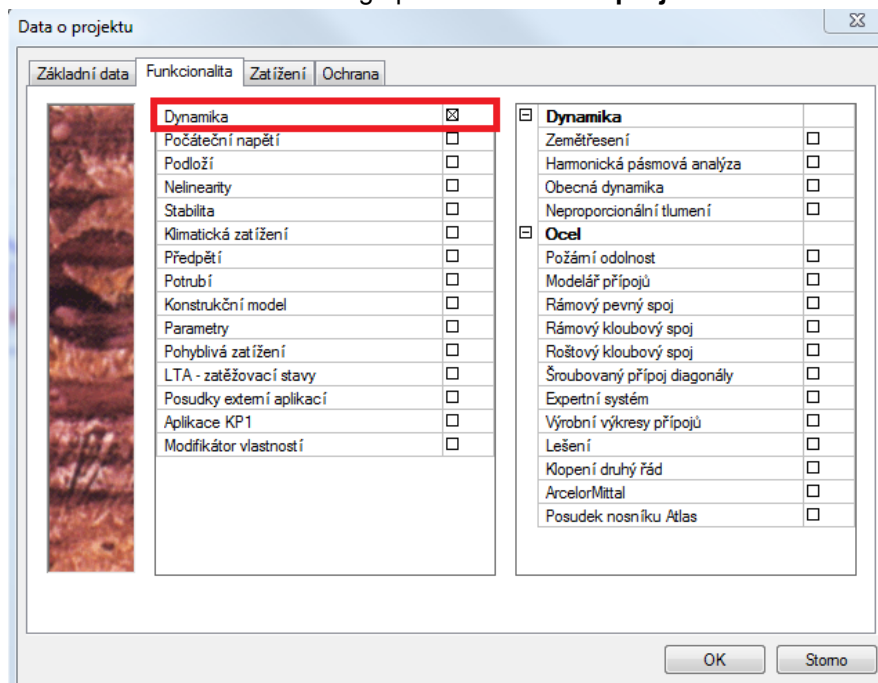
Příklad 1: Free_Vibration_1.esa

V tomto příkladu je modelován nosník se dvěma podporami. Nosič má průřez **IPE 200**, délku **6 m** a je vyroben z oceli **S235** podle normy **EC-EN**. Do středu nosníku byl přidán jeden uzel (sítě konečných prvků), což umožní přidat do tohoto místa uzlovou hmotu.

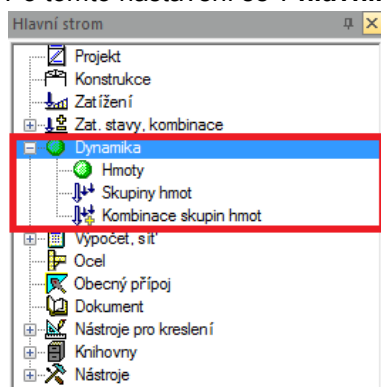


V tomto příkladu je zadán jeden statický zatěžovací stav: **vlastní tíha** nosníku.

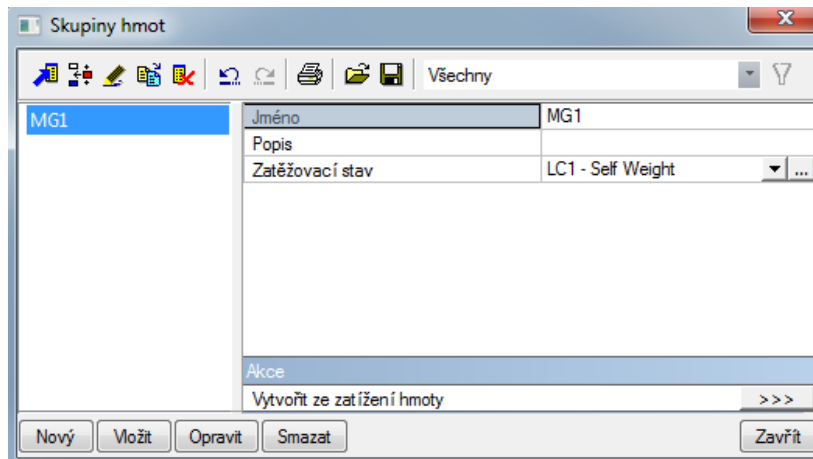
Krok 1: Prvním krokem v dynamickém výpočtu je aktivace funkcionality **Dynamika** na záložce **Funkcionalita** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**.



Po tomto nastavení se v **hlavním** stromovém menu objeví nová skupina:



Krok 2: Druhým krokem je vytvoření **skupiny hmot**.

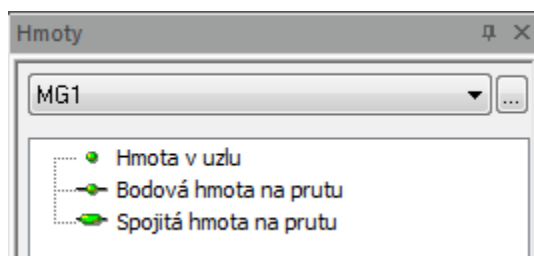


Jak je naznačeno v diagramu, skupina hmot slouží ke sdružení hmot stejným způsobem, jako zatěžovací stav sdružuje zatížení. Po zadání skupiny hmot lze zadat vlastní hmoty. Uživatel programu Scia Engineer má také možnost vytvořit hmoty ze statického zatěžovacího stavu. Pokud je například tíha střechy zadána jako liniové zatížení, funkce [Vytvořit hmoty ze zatěžovacího stavu] z tohoto liniového zatížení automaticky vygeneruje hmoty. Je zřejmé, že tato možnost poskytuje rychlé zadání potřebných dat.

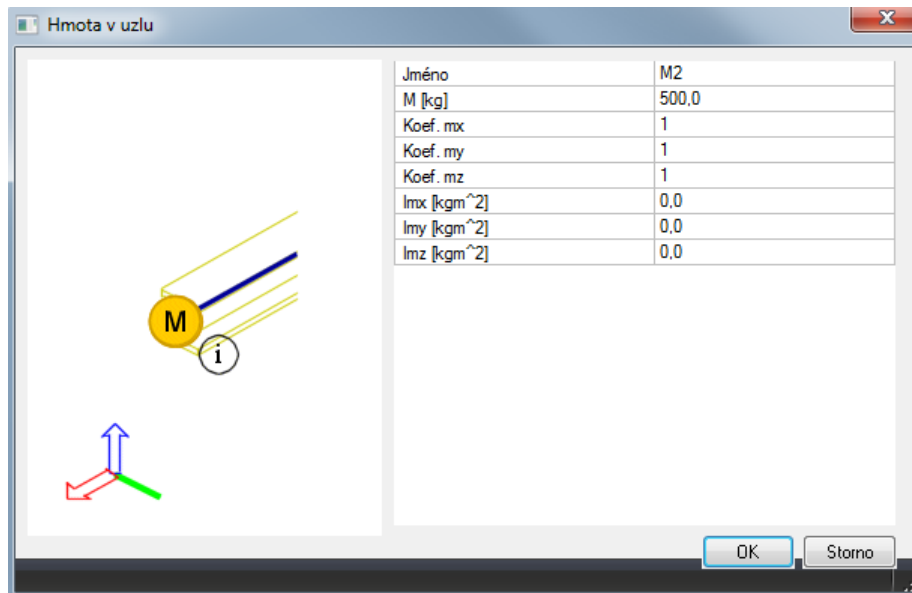
Poznámka

- *Vlastní tíha konstrukce je při dynamickém výpočtu vždy automaticky zohledněna. Hmoty z vlastní tíhy není zobrazena.*
- *Pokud definujeme zatěžovací stav, ale nepoužijeme funkci [Vytvořit hmoty ze zatěžovacího stavu], nic se nestane: žádné hmoty nebudou vytvořeny.*
- *Při generaci hmot ze zatížení použije program tíhové zrychlení zadané na záložce **Zatížení** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**. Standardně je zde nastavena hodnota **9,81 m/s²***
- *Hmoty zůstávají nezměněny po jakékoli opravě nebo po odstranění původního zatížení. Pokud má hmota odpovídat opravenému zatížení, je nutno vygenerovanou hmotu odstranit a vygenerovat ji znovu.*
- *Hmoty jsou generovány pouze ze svislé složky působících sil.*

Krok 3: Po vytvoření skupin hmot lze na konstrukci zadat **hmoty**. Scia Engineer umožňuje zadávat uzlové hmoty, bodové hmoty na nosníku, liniové hmoty na nosníku a plošné hmoty na plošných prvcích.



V našem příkladě bude zadána hmota **500 kg** do prostředního uzlu nosníku pomocí funkce **Hmota v uzlu**.

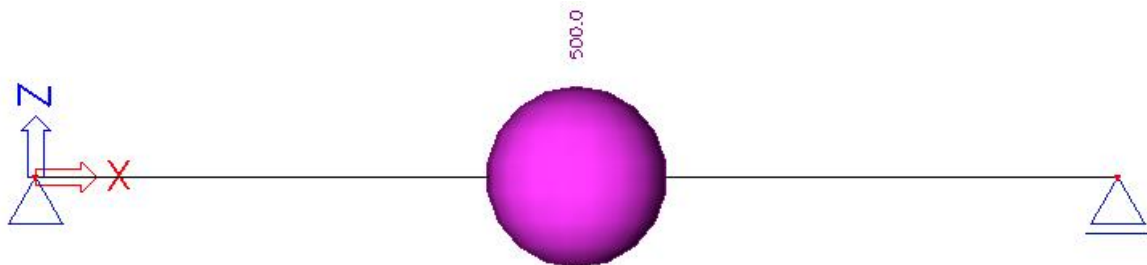


Parametry **koef. mx**, **koef. my** a **koef. mz** určují, jaké množství hmoty participuje ve vibracích ve směru globálních os X, Y a Z.

Koeficientů lze s výhodou použít například při výpočtu komínů: pokud **koef. mx** nastavíme na hodnotu 1 a **koef. my** a **koef. mz** na hodnotu 0, může hmota kmitat pouze ve směru globální osy X a vlastní tvary budou spočteny pouze v tomto směru.

Imx, **Imy** a **Imz** specifikují moment setrvačnosti kolem globálních os X, Y a Z. Ve výchozím nastavení je hmota koncentrována a nemá tak žádnou setrvačnost. Pokud hmota představuje velký stroj, je možné zadat moment setrvačnosti tohoto stroje.

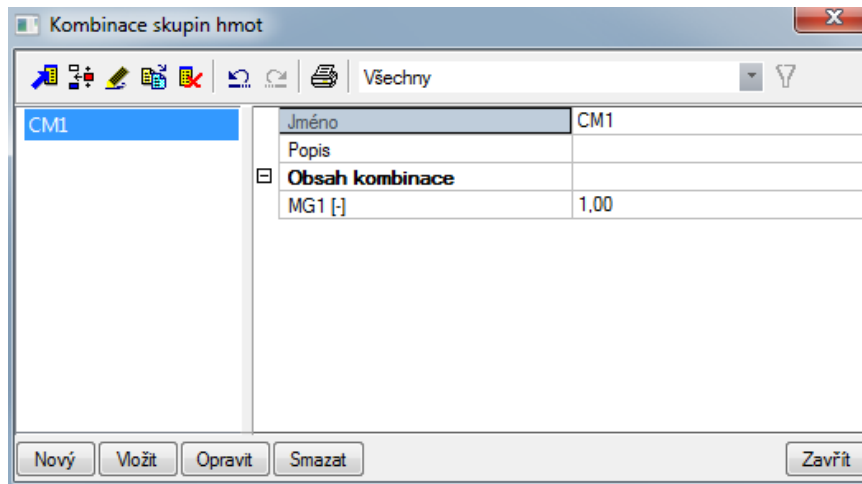
Uzlová hmota **500 kg** je zadána do středního uzlu nosníku.



Poznámka

- Pro zobrazení hmot a popisů hmot, otevřete dialog **Parametry zobrazení pro všechny entity > Zatížení/hmoty**.
- Hmoty představují přídavná data, která lze kopírovat či přemístit na jiné entity.

Krok 4: V dalším kroku můžeme skupiny hmot kombinovat v **kombinaci skupin hmot**.



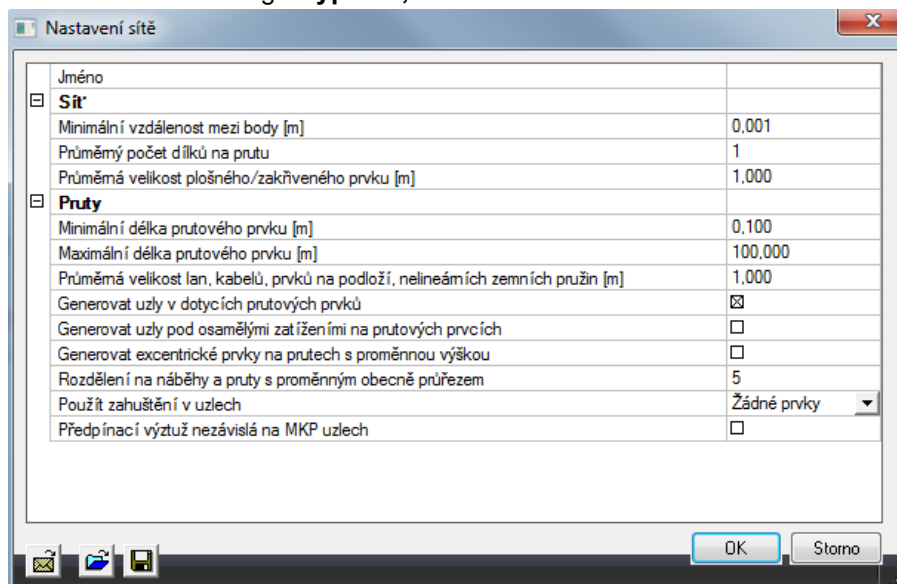
Kombinace skupin hmot pracuje na stejném principu jako kombinace zatížení. Pro každou skupinu hmot lze zadat násobící součinitel. Toho lze využít v případě, že se hmota konstrukce v průběhu životnosti konstrukce mění.

Uvažujme například zásobník na vodu. Jednu kombinaci skupin hmot lze vytvořit se součinitelem 1,00, který představuje plný zásobník a další kombinaci skupin hmot lze definovat se součinitelem 0,50, který představuje z poloviny prázdný zásobník. Tímto způsobem lze oba případy spočítat najednou.

Jak bylo uvedeno v kroku 2: vlastní tíha konstrukce je zohledněna v každé kombinaci skupin hmot.

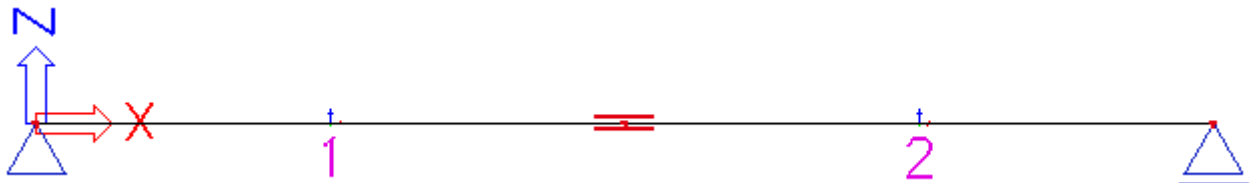
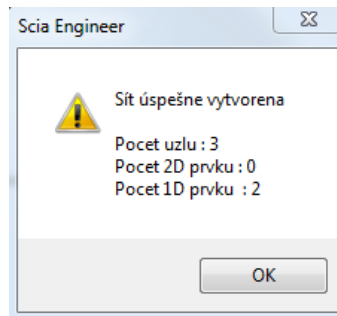
Krok 5: Po provedení předchozích kroků může být zahájen výpočet, ale jak bylo již řečeno v odstavci 2.2, může být nezbytné provést zjemnění sítě konečných prvků.

To lze nastavit v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení sítě**.

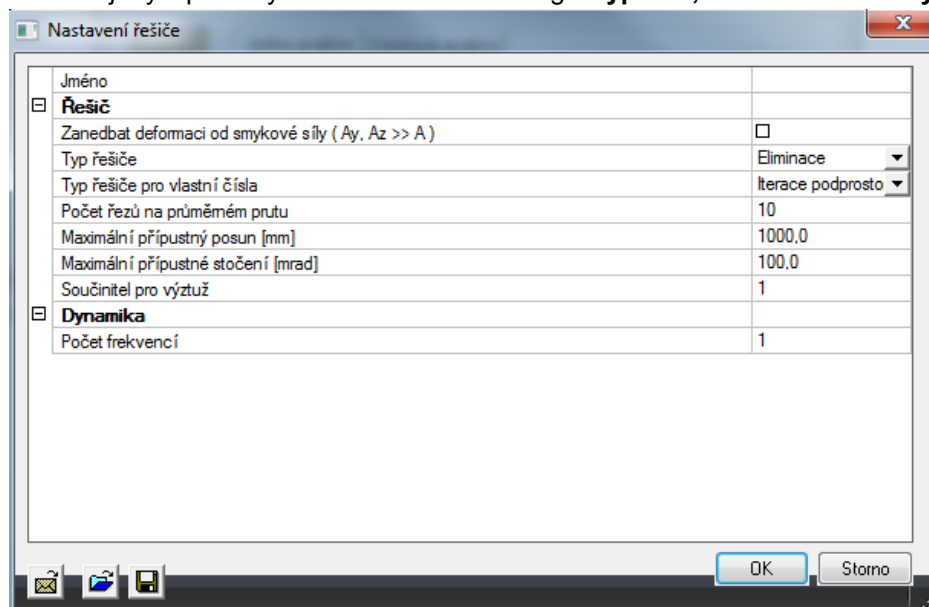


Pro 1D prvky lze zvětšit hodnotu parametru **Průměrný počet dílků na prutu**. Obecně platí, že pro dynamický výpočet je dostatečný počet 5 až 10. Pokud je zadáno příliš vysoké číslo, bude výpočet trvat velmi dlouho. Pro 2D prvky (desky a skořepiny) se nastavuje parametr **Průměrná velikost plošného prvku**.

V našem příkladu byl již vložen střední uzel a tak není potřeba provádět další zjemnění sítě konečných prvků. Po vygenerování sítě zobrazí program dialog se souhrnnými informacemi o vytvořené síti.



Krok 6: Dalším důležitým krokem před spuštěním výpočtu je určení počtu vlastních tvarů, které mají být spočteny. To lze nastavit v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení výpočtu**.



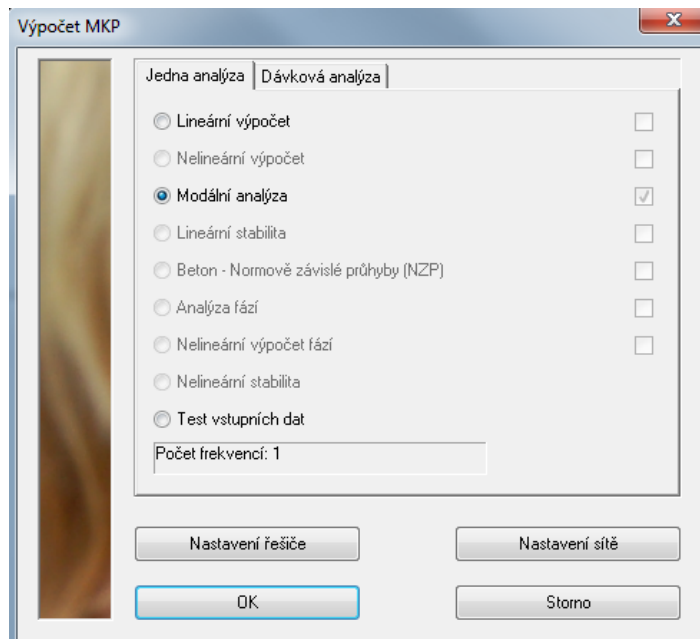
Již výše bylo vysvětleno, že počet vlastních frekvencí závisí na počtu stupňů volnosti v konstrukci a počet stupňů volnosti závisí na provedené diskretizaci.

V našem příkladu může uzel síť umístěný uprostřed délky nosníku kmitat pouze svisle. Proto lze spočítat pouze jeden vlastní tvar. Proto musíme parametr **Počet frekvencí** zmenšit na hodnotu 1.

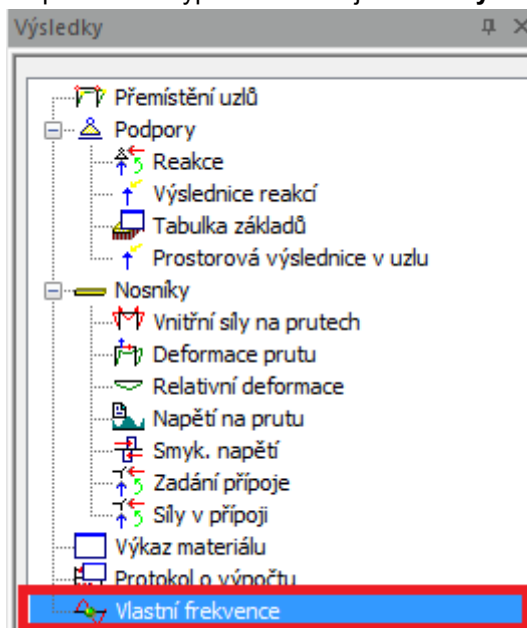
Poznámka

Pokud je zadaný počet frekvencí větší než počet stupňů volnosti, objeví se v průběhu výpočtu varovné hlášení, že výpočet nelze provést. Řešením je snížit počet požadovaných frekvencí nebo zjemnit síť konečných prvků, aby se tím vytvořilo více stupňů volnosti.

Krok 7: Posledním krokem je provedení výpočtu **Vlastních tvarů** pomocí funkce **Výpočet, síť > Výpočet**.



Po provedení výpočtu obsahuje menu **Výsledky** funkci **Vlastní frekvence**.



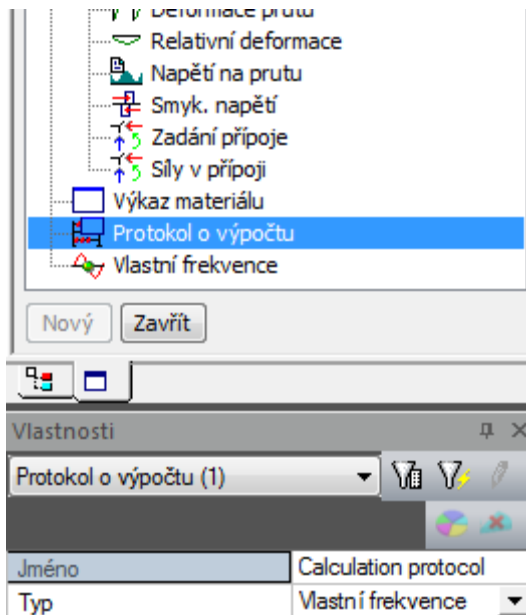
Okno s náhledem ukazuje následující výsledky.

Vlastní frekvence

N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Kombinace hmot : CM1				
1	6,31	39,67	1573,68	0,16

Podle tohoto výpočtu je první vlastní frekvence **6,31 Hz**.

Podrobnější výsledky lze nalézt v **Protokolu o výpočtu** pro výpočet **Vlastních frekvencí**.



Protokol o výpočtu

Calc protokol						
Výpočet vlastních tvarů						
Počet 2D prvků	0					
Počet 1D prvků	2					
Počet uzlů sítě	3					
Počet rovnic	18					
Kombinace skupin hmot	MK 1 CM1					
Počet frekvencí	1					
Spuštění výpočtu	16.11.2010 16:06					
Konec výpočtu	16.11.2010 16:06					
Suma hmot						
	[kg]	X	Y			
Kombinace skupin hmot 1	600.68	0.00	567.12			
Souč. participace tvaru						
Režim	Omega	Perioda	Frek. [Hz]	Wx / Wxtot	Wy / Wytot	Wz / Wztot
1	39.6705	0.1584	6.3138	0.0000 0.0000	0.0000 0.0000	1.0000 1.0000

Součet hmot ukazuje množství hmoty, která může pro tuto kombinaci skupin hmot kmitat. V našem příkladu se jedná o hmotu 500 kg a hmotnost nosníku.

Dané hodnoty lze spočítat následovně:

- Nosník má průřez IPE 200, $A = 0,00285 \text{ m}^2$.
 - Délka nosníku je 6 m.
 - Objemová hmotnost oceli S235 je 7850 kg/m^3
- ⇒ Celková hmotnost nosníku = $0,00285 \text{ m}^2 \times 6 \text{ m} \times 7850 \text{ kg/m}^3 = 134,235 \text{ kg}$

Směr X

čtvrtina hmoty nosníku jde do levé podpory a nepodílí se na kmitání.

$$\Rightarrow \text{Kmitající hmota} = 500 \text{ kg} + 3/4 \times 134,235 \text{ kg} = \mathbf{600,68 \text{ kg}}$$

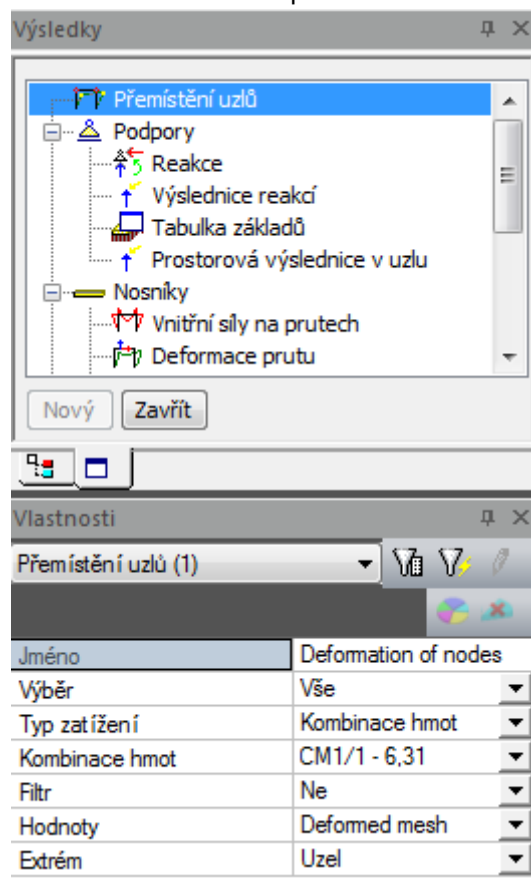
Směr Z

polovina hmoty nosníku jde do levé a pravé podpory a nepodílí se na kmitání.

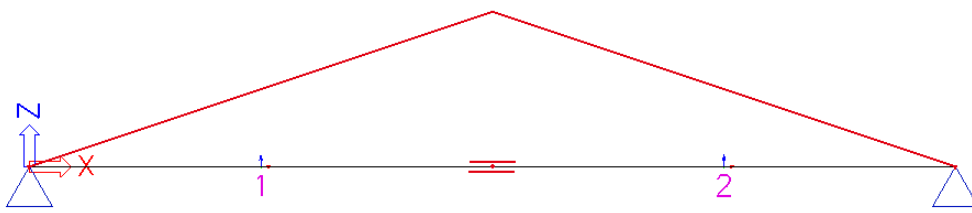
$$\Rightarrow \text{Kmitající hmota} = 500 \text{ kg} + 1/2 \times 134,235 \text{ kg} = \mathbf{567,12 \text{ kg}}$$

Je zřejmé, že hustší síť vede k přesnějšímu vyjádření participace hmoty nosníku. Součinitele participace tvaru vyjadřují množství hmoty, které kmitá v konkrétním vlastním tvaru jako procento celkové hmoty. V našem příkladu W_{zi}/W_{ztot} se rovná 1, což znamená, že ve svislém směru kmitá pro první vlastní tvar 100 % hmoty. Na tyto součinitele se podíváme podrobněji v kapitole o seizmickém výpočtu.

Vlastní tvar lze zobrazit pomocí funkce **Přemístění uzlů**.



- Výběr je nastaven na **Vše**.
- Typ zatížení je nastaven na **Kombinace hmot**.
- Pro každý vlastní tvar lze nyní vybrat příslušnou kombinaci hmot.
- Položka Hodnoty se nastaví na **Deformovaná síť**, tím se zobrazí deformace uzlů sítě.



Přemístění uzlů

Vlastní tvary, Extrém : Uzel

Výběr : Vše

Kombinace hmot : CM1/1 - 6,31

Kvůli lepší numerické interpretaci jsou čísla vynásobena 10000.

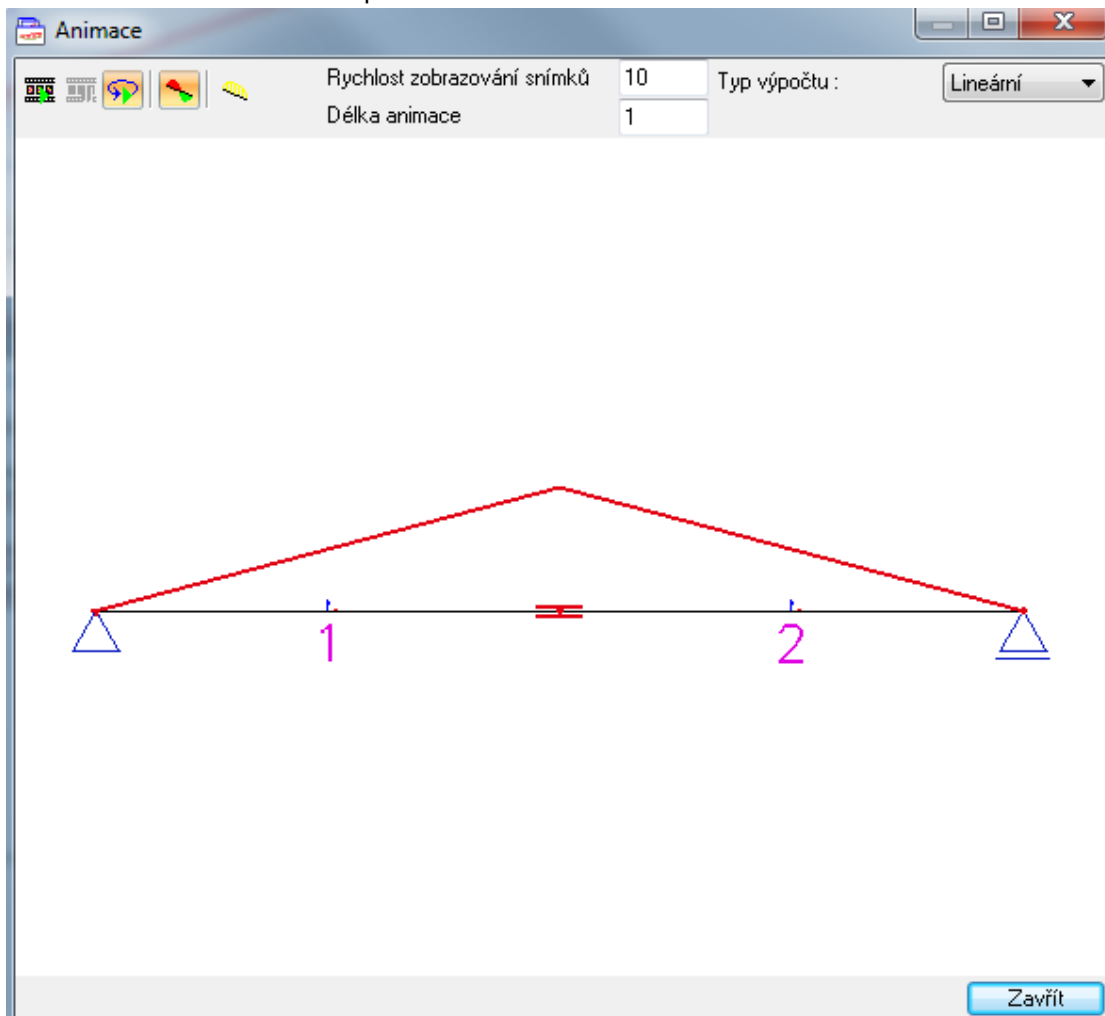
Uzel sítě	Stav	Ux [-]	Uz [-]	Fiy [-]
1	CM1/1 - 6,31	0,00	0,00	-208,68
2	CM1/1 - 6,31	0,00	419,92	0,00

Výsledek je očekávaný, vnitřní uzel kmitá. Jemnější síť poskytne mnohem lepší vystižení vlastního tvaru. Je důležité mít na paměti, že kmitání probíhá ve dvou směrech: v našem příkladu vlastní tvar vykazuje pohyb nahoru, ale v další polovině periody nastane pohyb směrem dolů.

Volné kmitání poskytuje pouze představu o vlastnostech konstrukce a umožňuje předvídat chování konstrukce vystavené časově proměnnému zatížení. V přírodě dává každé těleso přednost tomu zůstat v klidovém stavu. Pokud je přinuceno k pohybu, vybírá si takový způsob, kdy dochází k minimální spotřebě energie. Těmito způsoby pohybu jsou právě vlastní tvary.

Vlastní tvar nepředstavuje skutečnou deformaci konstrukce. Pouze ukazuje deformaci, která je pro konstrukci „přirozená“. Proto jsou velikosti spočtených přemístění bezrozměrná čísla. Prezentovaná čísla jsou ortonormovaná, tj. mají speciální vztah k hmotám v konstrukci. Absolutní hodnota jednotlivých čísel není důležitá. Podstatný je jejich vzájemný poměr.

Kmitání konstrukce lze ukázat pomocí funkce **Pohled > Animace**.



Aktivování volby „**Přestavení minima měřítka z 0 na -MAX**“ ukáže skutečné kmitání v obou směrech.

**Poznámka**

Kombinací klávesy Ctrl a pravého tlačítka myši lze konstrukci v animačním okně otáčet.

Ruční výpočet

Abychom mohli zkontrolovat výsledky spočítané programem, spočteme vlastní frekvenci konstrukce ručně.

Použijeme referenci [1] a kruhovou frekvenci nosníku se dvěma podporami a hmotou uprostřed rozpětí spočteme podle vzorce:

$$\omega^2 = 48 \frac{EI}{ML^3} \quad (2.7)$$

Kde:

- ω = Kruhová frekvence
- E = Yongův modul pružnosti
- I = Moment setrvačnosti nosníku
- L = Délka nosníku
- M = Hmoty uprostřed rozpětí nosníku

V našem příkladu:

$$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$$

$$I_y = 19430000 \text{ mm}^4$$

$$L = 6000 \text{ mm}$$

$$M = 500 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 48 \frac{210.000 \text{ N/mm}^2 \cdot 19430000 \text{ mm}^4}{500 \text{ kg} \cdot (6000 \text{ mm})^3} = 1813,47 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\Rightarrow \omega = 42,58 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \mathbf{6,78 \text{ Hz}}$$

Výsledek spočtený programem Scia Engineer byl **6,31 Hz**.

Rozdíl ve výsledcích je způsobem dvěma předpoklady přijatými v ručním výpočtu:

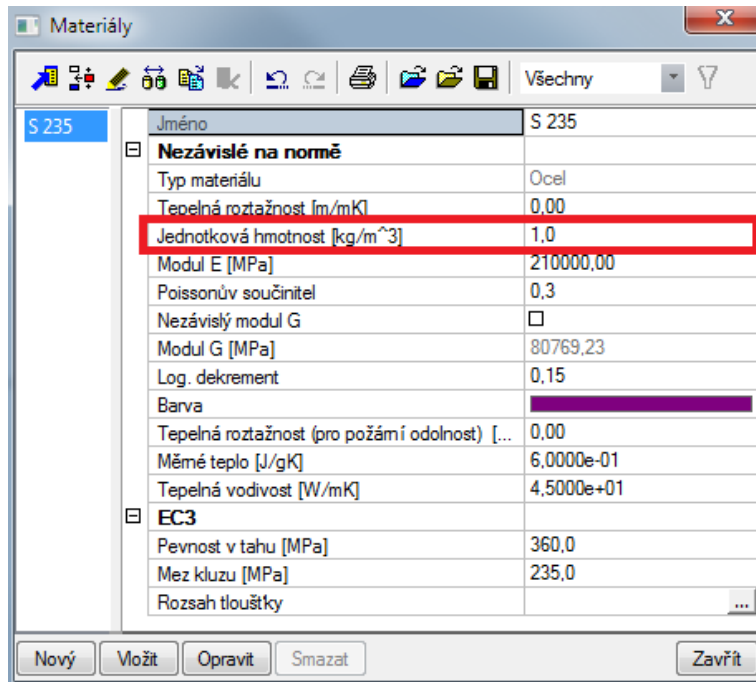
- Ruční výpočet nezohledňuje vlastní tíhu nosníku

Protože $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ menší hmotnost povede k vyšší ω a nižší f .

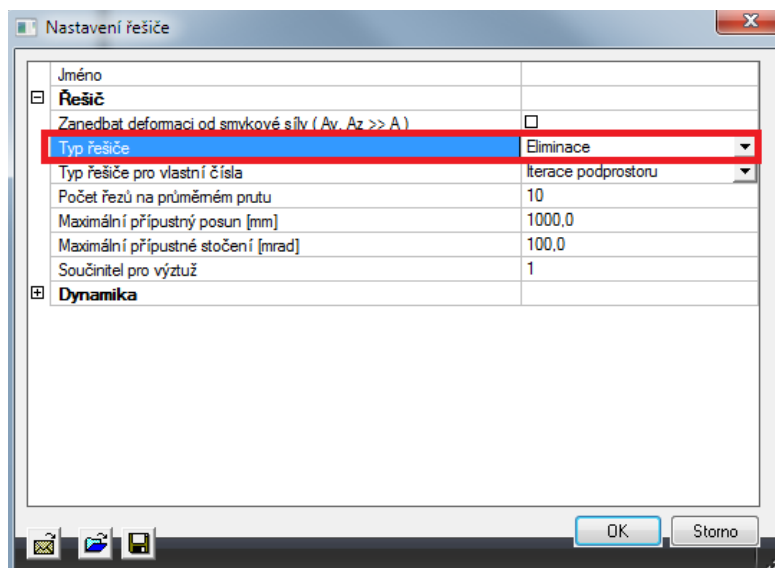
Ruční výpočet nezohledňuje smykovou deformaci. Menší deformace vede na vyšší tuhost k , vyšší ω a vyšší f .

Tyto dva předpoklady lze zohlednit také ve výpočetním modelu v programu Scia Engineer.

- Abychom zanedbali vlastní tíhu, můžeme v knihovně materiálů nastavit objemovou hmotnost pro **S235** na **1 kg/m³**.



Abychom zanedbali smykovou deformaci, aktivujeme stejnojmennou volbu v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení řešiče**.



Pokud nyní provedeme výpočet znovu, dostaneme následující výsledky:

Vlastní frekvence

N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Kombinace hmot : CM1				
1	6,72	42,25	1784,88	0,15

Tyto výsledky již korespondují s ručním výpočtem.

Tento příklad názorně ukazuje důležitost zkontrolování předpokladů, za jakých byla teorie aplikována. Při porovnávání výsledků dvou různých výpočtů se vždy přesvědčte, že používáte stejné předpoklady a stejná případná zjednodušení.

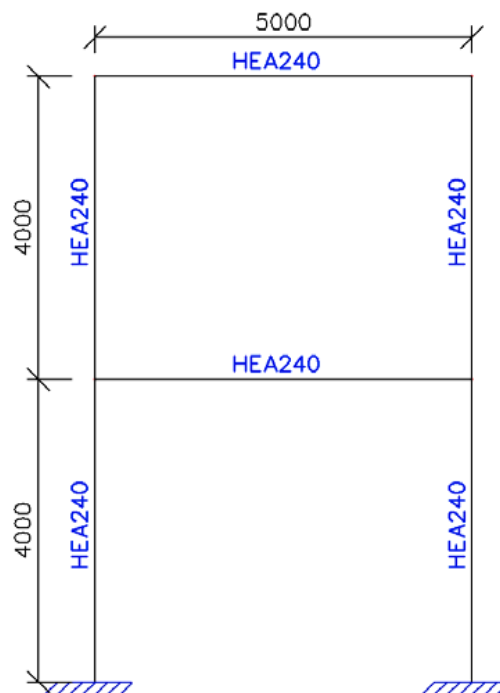
2.3 Rámy

V tomto odstavci je výpočet volného kmitání ukázán na rámové konstrukci. Jsou zde podrobně představeny teoretické principy a ty jsou potom ověřeny ručním výpočtem.

Příklad 2: Free_Vibration_2.esa

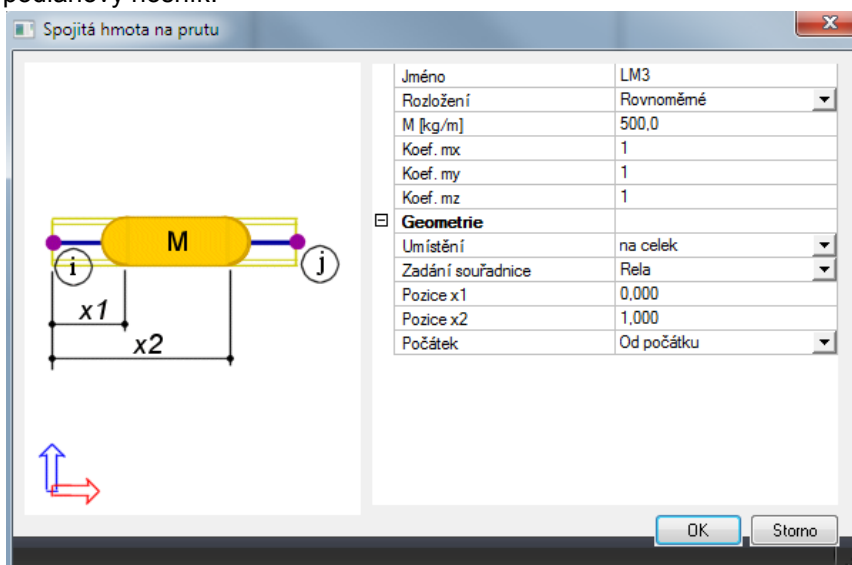
V tomto příkladu budeme modelovat dvoupatrový rám. Všechny nosníky a sloupy mají průřez **HEA 240** a jsou vyrobeny z materiálu **S235** podle **EC-EN**. Výška všech podlaží je **4 m** a šířka rámu je **5 m**. Patky sloupů jsou zadány jako vetknuté.

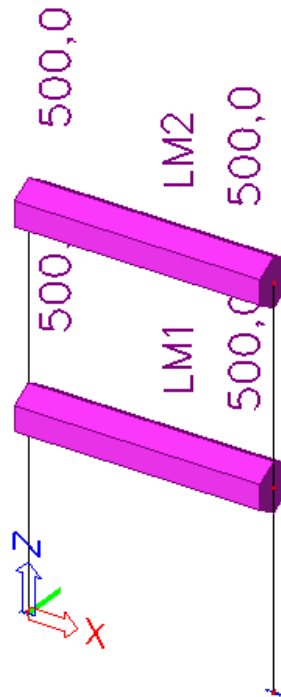
Je vytvořen jeden statický zatěžovací stav: **vlastní tíha** rámu. Na nosnících tvořících podlahu a střechu prvního patra je zavedena liniová hmota **500 kg/m**.



Kroky 1 a 2: Aktivace funkcionality **Dynamika** a vytvoření **skupiny hmot** se provede stejně jako v předchozím příkladu.

Krok 3: Po vytvoření skupiny hmot lze zadat liniovou hmotu **500 kg/m** na střešní a podlahový nosník.

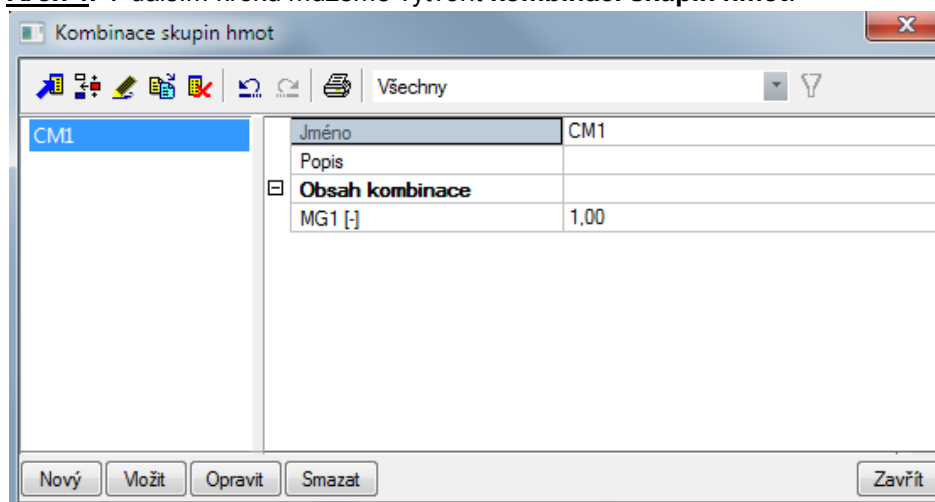




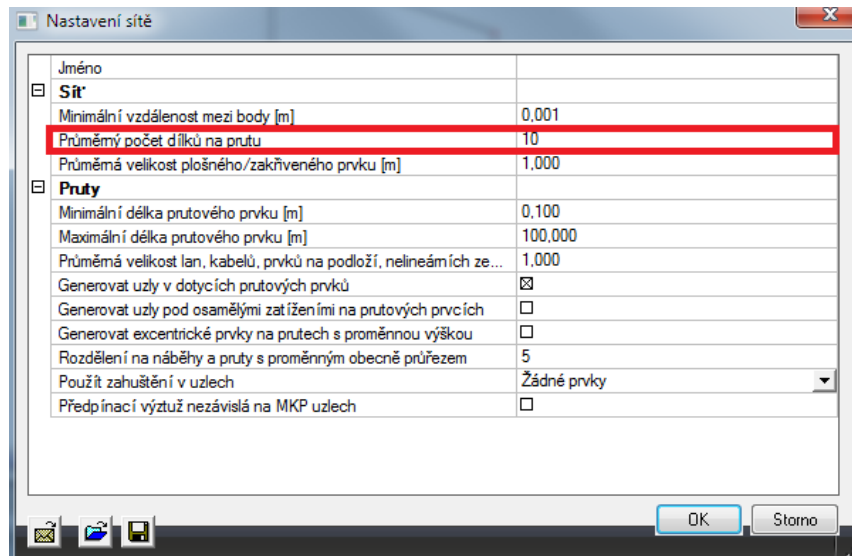
Poznámka

Renderování hmot zapnete v dialogu **Parametry zobrazení pro všechny entity > Různé > Styl kreslení pro model +zatížení**.

Krok 4: V dalším kroku můžeme vytvořit kombinaci skupin hmot.

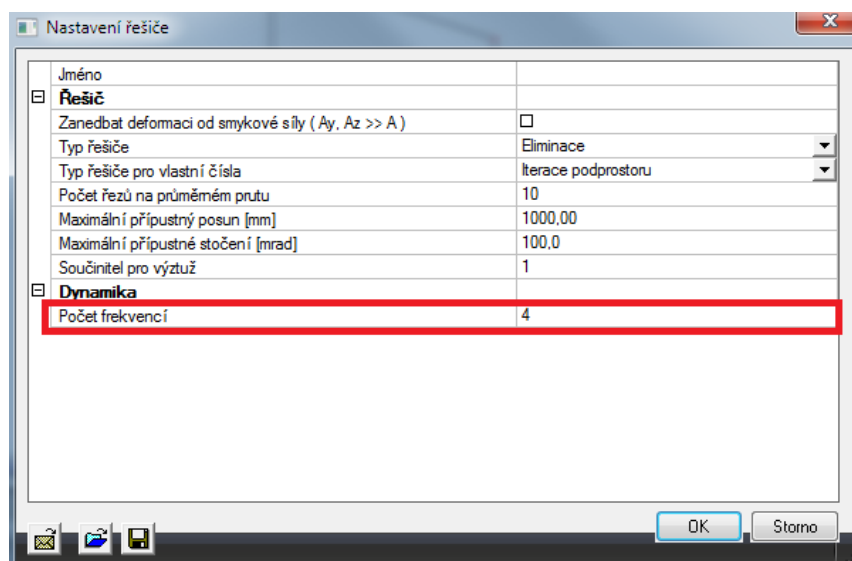


Krok 5: Pro získání přesných dynamických výpočtů zjmníme síť konečných prvků. To lze nastavit v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení sítě**.



Parametr **Průměrný počet dílků na prutu** nastavíme na **10**, abychom získali dobré rozložení liniových hmot a hmot nosníků.

Krok 6: Posledním krokem před spuštěním výpočtu je nastavení počtu počítaných vlastních tvarů. Výchozí hodnota v dialogu **Výpočet, sítě > Nastavení řešiče** je **4**. To je pro náš příklad dostačující.

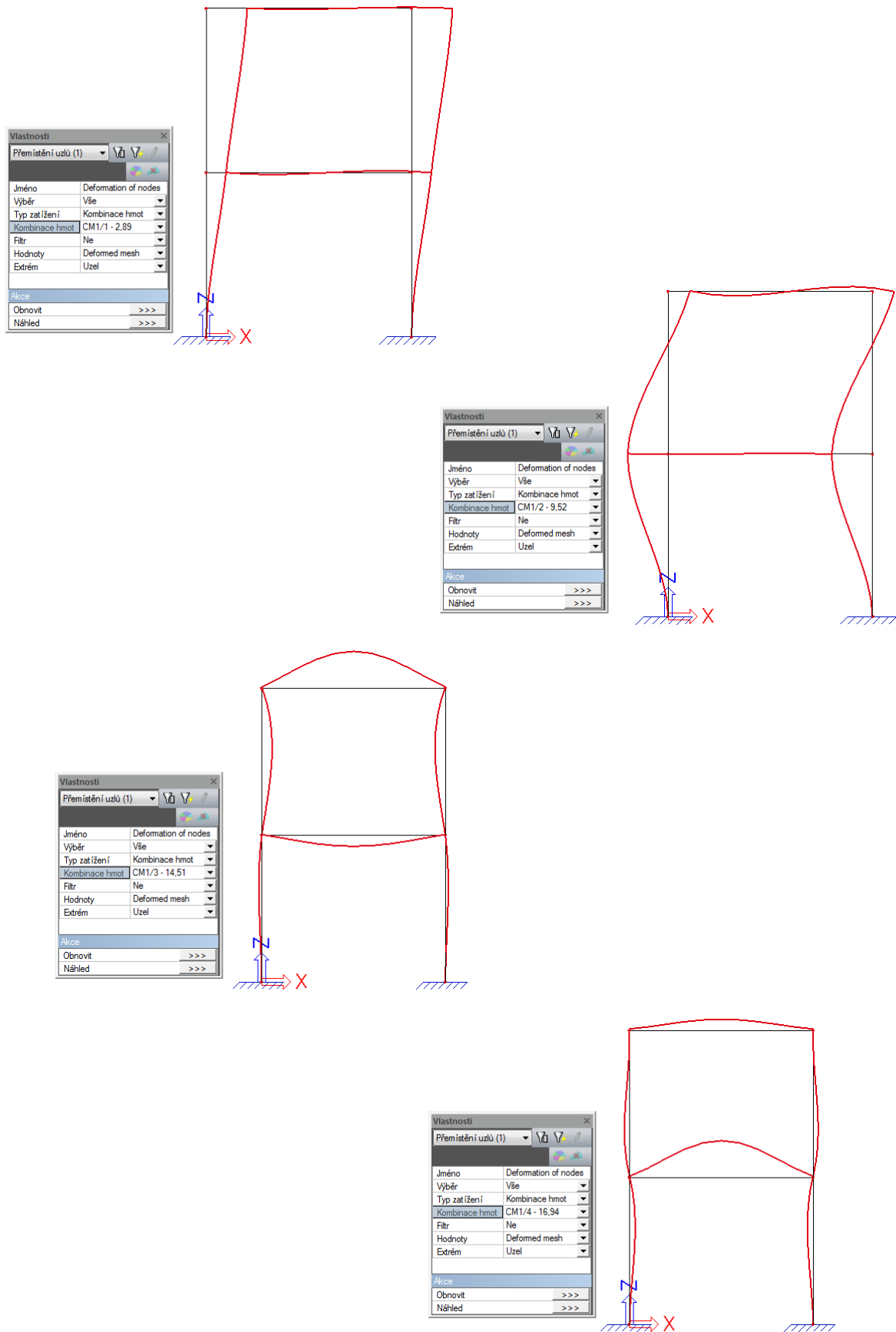


Krok 7: Nyní lze provést výpočet **Vlastních tvarů** pomocí funkce **Výpočet, sítě > Výpočet**. Získáme následující výsledky:

Vlastní frekvence

N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Kombinace hmot : CM1				
1	2,89	18,15	329,32	0,35
2	9,52	59,83	3579,23	0,11
3	14,51	91,18	8314,22	0,07
4	16,94	106,45	11332,53	0,06

Jak již bylo uvedeno v minulém příkladu, vlastní tvary lze zobrazit pomocí funkce **Přemístění uzlů** při nastavení volby **Deformovaná síť**.



Protokol o výpočtu pro výpočet **Vlastních frekvencí** obsahuje následující informace:

Protokol o výpočtu

Calc protokol						
Výpočet vlastních tvarů						
Počet 2D prvků	0					
Počet 1D prvků	60					
Počet uzlů sítě	60					
Počet rovnic	360					
Kombinace skupin hmot	MK 1 CM1					
Počet frekvencí	4					
Spuštění výpočtu	27.12.2010 13:56					
Konec výpočtu	27.12.2010 13:56					
Suma hmot						
	[kg]	X	Y	Z		
Kombinace skupin hmot 1	6543.37	0.00	6543.37			
Souč. participace tvaru						
Režim	Omega	Perioda	Frek. [Hz]	Wxi / Wxtot	Wyi / Wytot	Wzi / Wztot
1	18.1477	0.3462	2.8883	0.8628	0.0000	0.0000
2	59.8285	0.1050	9.5220	0.1108	0.0000	0.0000
3	91.1850	0.0689	14.5125	0.0000	0.0000	0.1554
4	106.4575	0.0590	16.9432	0.0000	0.0000	0.5360
				0.9736	0.0000	0.6914

Součet hmot ukazuje množství hmoty, která může pro tuto kombinaci skupin hmot kmitat.

V našem příkladu je to dáno liniovými hmotami 500 kg/m a hmotou prvků.

Výslednou hodnotu lze spočítat následovně:

- Nosníky mají průřez HEA 240 s průřezovou plochou $A=0,00768 \text{ m}^2$,
- Objemová hmotnost pro ocel S235 je 7850 kg/m^3 ,
- Celková délka nosníků je $4 \times 4 \text{ m} + 2 \times 5 \text{ m} = 26 \text{ m}$.

Ale jak bylo řečeno v odstavci 2.2, hmota je soustředěna do uzlů sítě. Síť konečných prvků byla zjemněna na 10 prutových prvků na nosník.

To znamená, že u dvou spodních sloupů je polovina hmoty prutového prvku soustředěna do podpory a neúčastní se volného kmitání.

- Délka sloupu je 4m.
 - Délka prutového prvku je $4 \text{ m} / 10 = 0,4 \text{ m}$.
 - Délka poloviny prutového prvku je $0,4 \text{ m} / 2 = 0,2 \text{ m}$.
- ⇒ Celková délka nosníků zohledněných při výpočtu hmoty je $26 \text{ m} - 0,2 \text{ m} - 0,2 \text{ m} = 25,6 \text{ m}$.
- ⇒ Celková hmota = $0,00768 \text{ m}^2 \times 25,6 \text{ m} \times 7850 \text{ kg/m}^3 = 1543,37 \text{ kg}$.

Tato hmota je přidána k liniovým hmotám 500 kg/m.

- ⇒ Kmitající hmota = $2 \times 500 \text{ kg/m} \times 5 \text{ m} + 1543,37 \text{ kg} = \mathbf{6543,37 \text{ kg}}$.

Součinitele participace tvaru definují množství hmoty, která kmitá v konkrétním vlastním tvaru jako procento celkové hmoty.

Pro 1. vlastní tvar: 86 % celkové hmoty kmitá ve směru osy X.

Pro 2. vlastní tvar: 11% celkové hmoty kmitá ve směru osy X.

Pro 3. vlastní tvar: 16% celkové hmoty kmitá ve směru osy Z.

Pro 4. vlastní tvar: 54% celkové hmoty kmitá ve směru osy Z.

Spodní řádek ukazuje celkové procento po zkombinování všech těchto čtyř tvarů: **97 %** je zohledněno pro směr X a **69 %** pro směr Z.

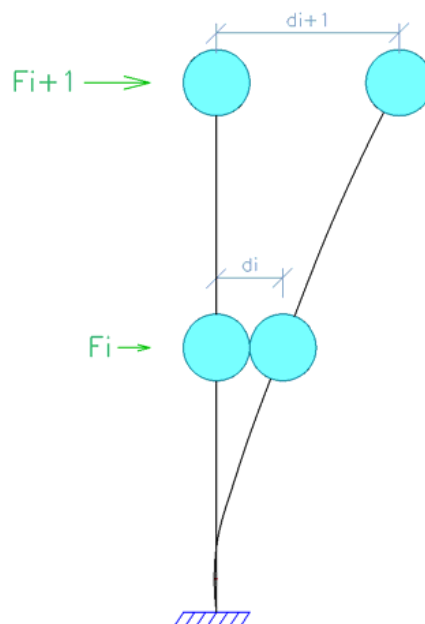
Na tyto součinitele se podíváme podrobněji ve výpočtu zemětřesení v kapitole 4. Pro výpočet zemětřesení je třeba, aby bylo ve výpočtu uvažováno takové množství vlastních tvarů, aby bylo zohledněno alespoň 90 % celkové hmoty [7].

Ruční výpočet

Abychom mohli zkontrolovat výsledky spočítané programem, spočteme nejnižší vlastní frekvenci konstrukce ručně.

Zde použitá metoda je v literatuře popisována jako Rayleighova energetická metoda. [1], [13].

V této metodě se konstrukce idealizuje jako konzola s hmotami soustředěnými v úrovni každého z podlaží.



Konstrukce je pak zatížena soustavou lineárně se zvětšujících vodorovných sil v úrovni všech podlaží. Díky tomuto zatížení se konstrukce zdeformuje a tak budeme znát tuhost systému. Vlastní frekvenci konstrukce lze pak přibližně vypočítat podle následujícího vzorce:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n M_i \cdot d_i^2}}$$

Kde:

n = počet podlaží,

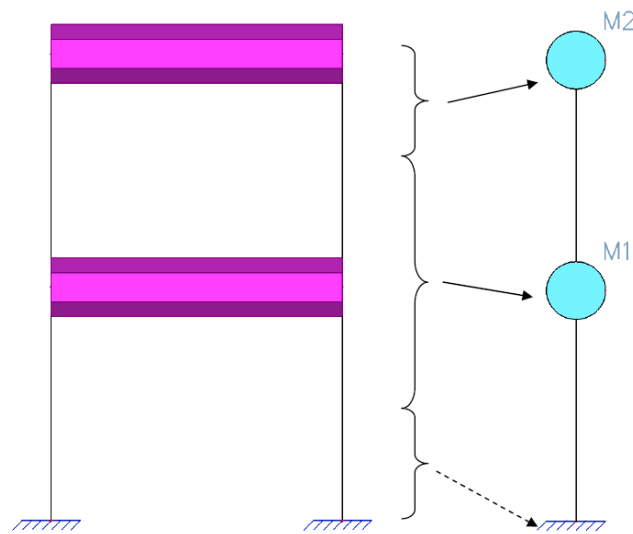
F_i = vodorovná síla působící na úrovni i -tého podlaží

d_i = vodorovná deformace na úrovni i -tého podlaží

M_i = idealizovaná hmota na úrovni i -tého podlaží

Dobře lze vidět analogii mezi tímto vzorcem a vzorcem $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Abychom mohli tento vzorec použít, musíme si konstrukci idealizovat jako konzolu.



Hmotu spodní části konstrukce je idealizována do podpory konzoly, a tak se neúčastí kmitání.

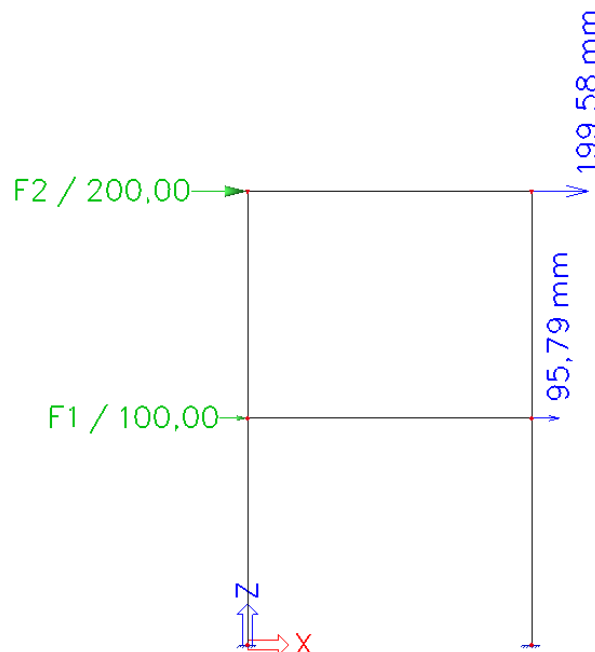
Hmotu **M1** lze spočítat následovně:

$$0,00768 \text{ m}^2 \times (5 + 4 + 4) \text{ m} \times 7850 \text{ kg/m}^3 + 500 \text{ kg/m} \times 5 \text{ m} = \mathbf{3283,74 \text{ kg}}$$

Hmotu **M2** lze spočítat následovně:

$$0,00768 \text{ m}^2 \times (5 + 4) \text{ m} \times 7850 \text{ kg/m}^3 + 500 \text{ kg/m} \times 5 \text{ m} = \mathbf{3\ 042,59 \text{ kg}}$$

Abychom spočítali vodorovnou deformaci **d1** od lineárně se zvyšující síly **Fi** na úrovni každého podlaží, je programem spočten statický zatěžovací stav obsahující síly **100 kN** a **200 kN**. Získáme následující uzlové deformace:



- ⇒ $F1 = 100 \text{ kN} = 100000 \text{ N}$
- ⇒ $F2 = 200 \text{ kN} = 200000 \text{ N}$
- ⇒ $d1 = 95,79 \text{ mm} = 0,09579 \text{ m}$

$$\Rightarrow d_2 = 199,58 \text{ mm} = 0,19958 \text{ m}$$

Aplikujeme vzorec (2.8):

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{100000N \cdot 0,09579m + 200000N \cdot 0,19958m}{3283,74kg \cdot (0,09579m)^2 + 3042,59kg \cdot (0,19958m)^2}} = \mathbf{2,88 \text{ Hz}}$$

Tento výsledek odpovídá frekvenci **2,89 Hz** vypočtené programem.

Příklad 3: Free_Vibration_3.esa

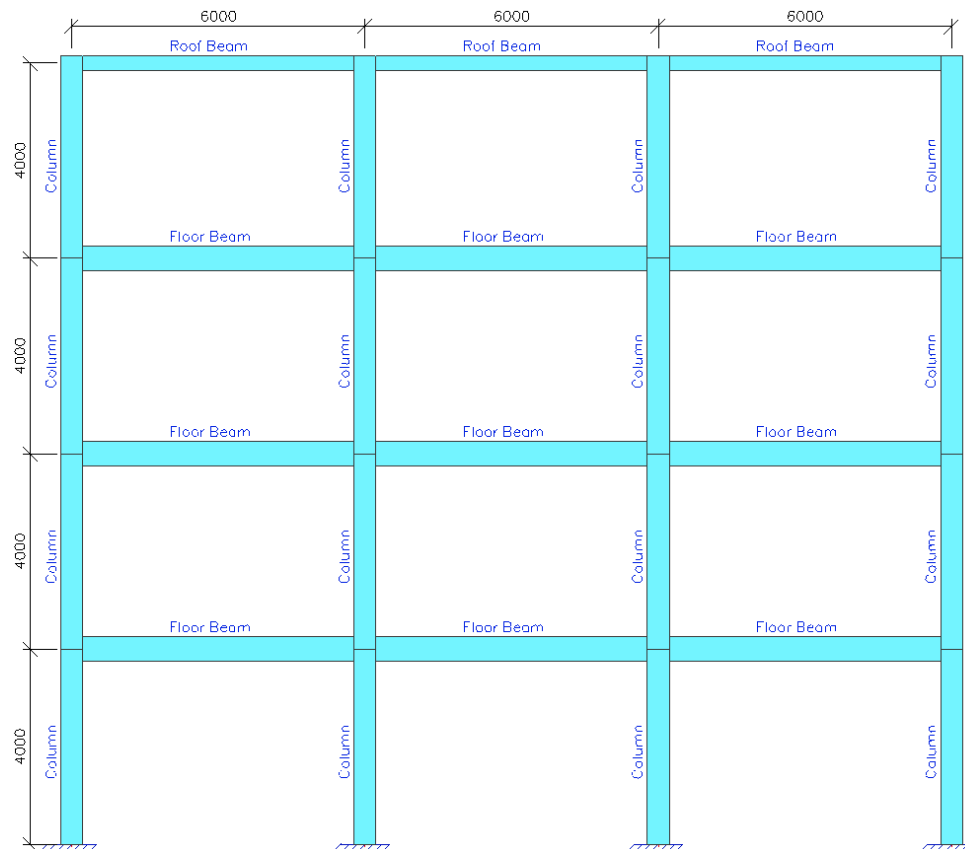
V tomto příkladu budeme modelovat kancelářskou budovu jako rám. Budova je zhotovena z materiálu **C30/37** podle **EC-EN**. Objekt má čtyři podlaží, každé o výšce **4 m**. Ve vodorovném směru je rám složen ze čtyř sloupů umístěných ve vzájemné vzdálenosti **6 m**. Ve směru z roviny je vzdálenost rámu **5 m**. Patky sloupů jsou zadány jako vetknuté.

Jednotlivé prvky rámu mají tyto průřezy:

- Sloupy: **Obdélníkový průřez 300 x 450**
- Podlahové nosníky: **Obdélníkový průřez 250 x 500**
- Střešní nosníky: **Obdélníkový průřez 150 x 300**

Svislé zatížení působící na konstrukci je:

- **vlastní tíha** betonových nosníků
- tíha podlah: **5 kN/m²**
- tíha střechy: **2 kN/m²**
- užité zatížení pro kategorii B (kanceláře) je **3 kN/m²**



Tím dostaneme tři zatěžovací stavy:

LC1: **vlastní tíha**

LC2: stálé zatížení: **25 kN/m** na podlahové nosníky, **10 kN/m** na střešní nosníky

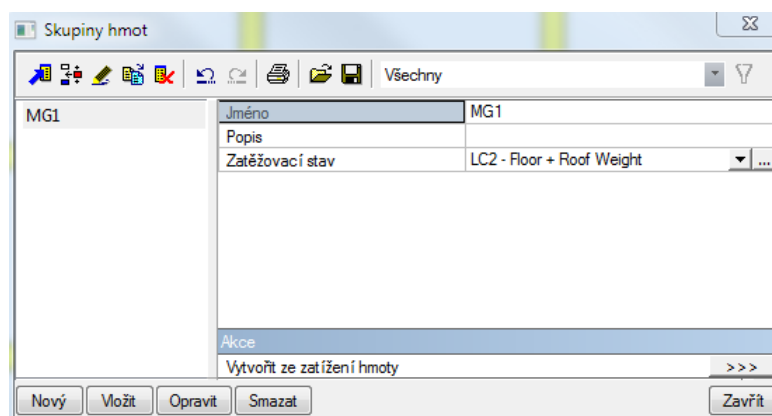
LC3: nahodilé zatížení: **15 kN/m** na podlahové nosníky

Krok 1: Prvním krokem v dynamickém výpočtu je aktivace funkcionality **Dynamika** na záložce **Funkcionalita** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**.

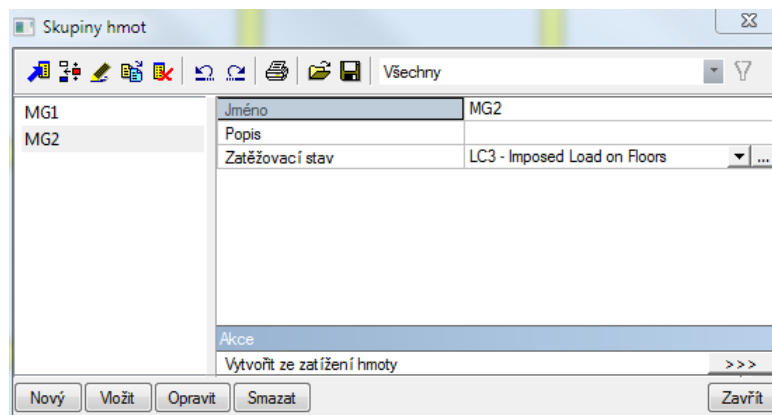
Kroky 2 a 3: Druhým krokem je vytvoření **skupin hmot**, třetím pak zadání **hmot**.

Protože vlastní tíha se v **kombinaci skupin hmot** zohledňuje automaticky, vytvoříme zde dvě **skupiny hmot**, po jedné pro každý statický zatěžovací stav.

Pro skupinu hmot **MG1** je vybrán zatěžovací stav **LC2**: tíha podlah a střechy. S pomocí akčního tlačítka [Vytvořit hmoty ze zatěžovacího stavu] automaticky vygenerujeme hmoty z již zadaného zatížení.



Stejným způsobem se vytvoří skupina hmot **MG2**, ve které se hmoty automaticky vytvoří pro zatěžovací stav **LC3**: užité zatížení.

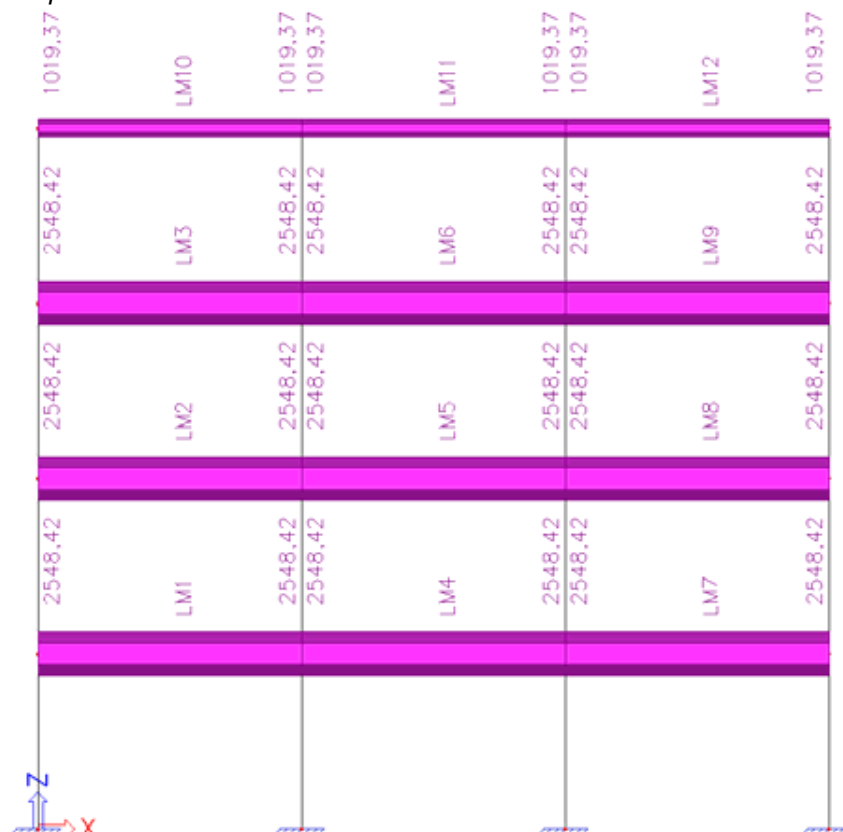


Poznámka

Jak bylo již uvedeno u prvního příkladu: Při generaci hmot ze zatížení použije program tíhové zrychlení zadané na záložce **Zatížení** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**. Výchozí hodnota je **9,81 m/s²**.

V nabídce **Hmoty** lze obsah obou skupin hmot zobrazit na obrazovce.

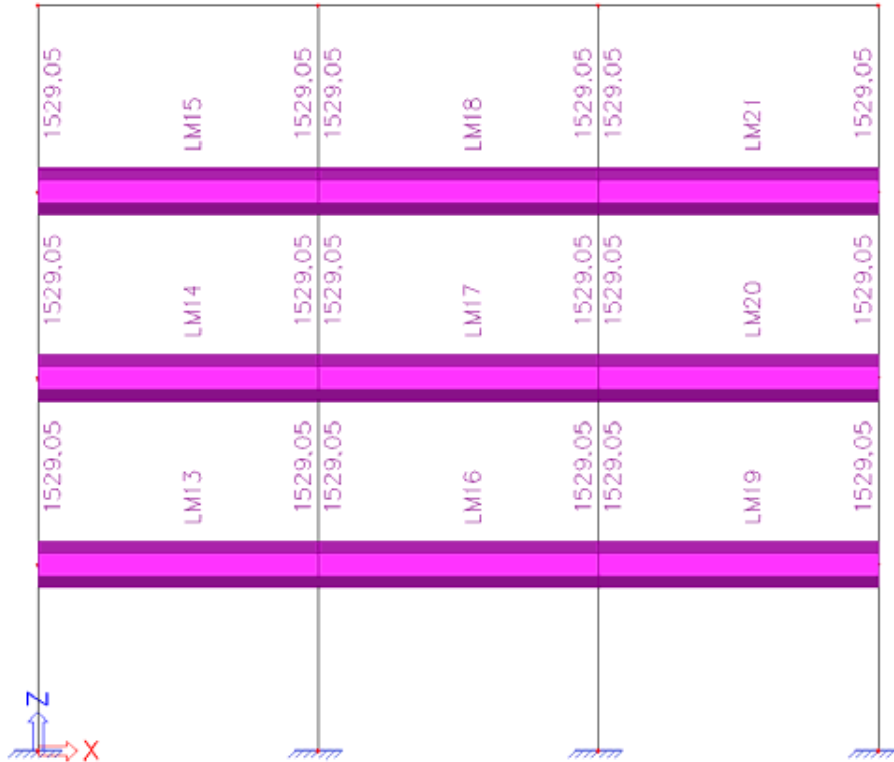
Skupina hmot **MG1**:



$$\text{Hmoty podlahy: } \frac{25000 \text{ N/m}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 2548,4 \text{ kg/m}$$

$$\text{Hmoty střechy: } \frac{10000 \text{ N/m}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 1019,4 \text{ kg/m}$$

Skupina hmot MG2:



$$\text{Hmoty užitého zatížení: } \frac{15000 \text{ N/m}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 1529,1 \text{ kg/m}$$

Krok 4: Obě skupiny hmot můžeme nyní zkombinovat v **kombinaci skupin hmot**.

Podle Eurocode 8 [7] je nutno při výpočtu vlastních tvarů zohlednit veškeré gravitační zatížení objevující se v následující kombinaci zatížení:

$$\sum G_k + \sum \psi_{E,i} \cdot Q_{k,i} \quad (2.9)$$

Kde:

G_k = charakteristická hodnota stálého zatížení

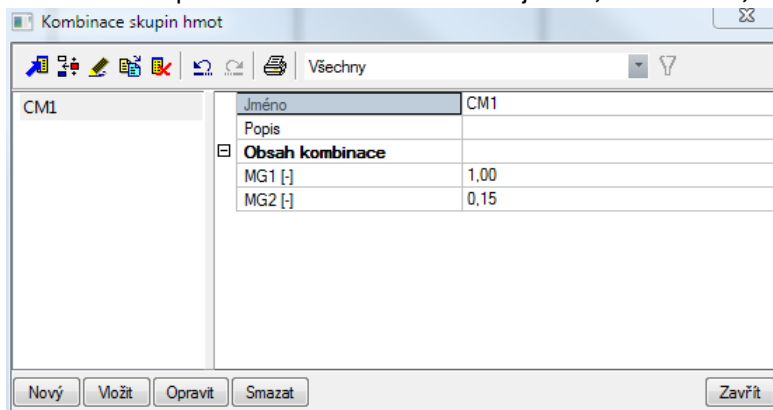
$Q_{k,i}$ = charakteristická hodnota nahodilého zatížení

$\psi_{E,i}$ = součinitel kombinace pro zatížení $i = \varphi \cdot \psi_{2,i}$

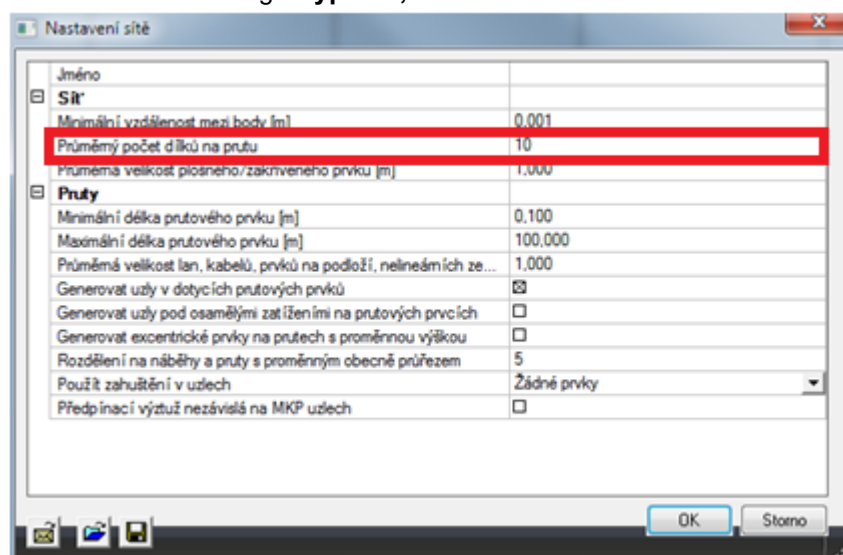
Součinitel kombinace $\psi_{E,i}$ zohledňuje pravděpodobnost výskytu nahodilého zatížení během zemětřesení, pokud toto zatížení není přítomné během celé životnosti konstrukce.

Pro náš příklad, kde je nahodilé zatížení **kategorie B** a kde jsou podlaží užívaná nezávisle, se φ bere hodnotou **0,5** a $\psi_{2,i}$ hodnotou **0,3**. Tím získáme hodnotu $\psi_{E,i}$ rovnu **0,15**.

Kombinaci skupin hmot **CM1** lze formulovat jako **1,00 MG1 + 0,15 MG2**.

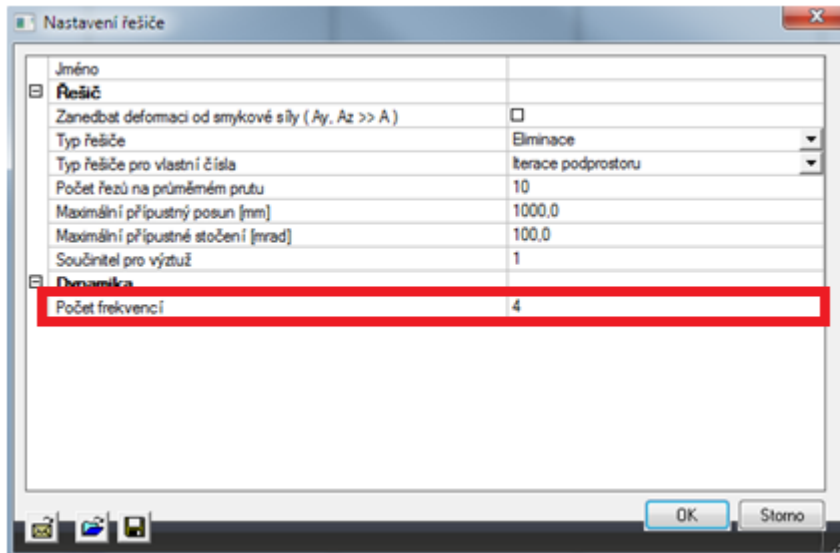


Krok 5: Pro získání přesných výsledků dynamických výpočtů zjmenujeme síť konečných prvků. To lze nastavit v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení sítě**.



Parametr **Průměrný počet dílků na prutu** nastavíme na **10**, abychom získali dobré rozložení liniových hmot a hmot prvků.

Krok 6: Posledním krokem před spuštěním výpočtu je nastavení počtu počítaných vlastních tvarů. Výchozí hodnota v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení řešiče** je **4**. To je pro náš příklad dostačující.

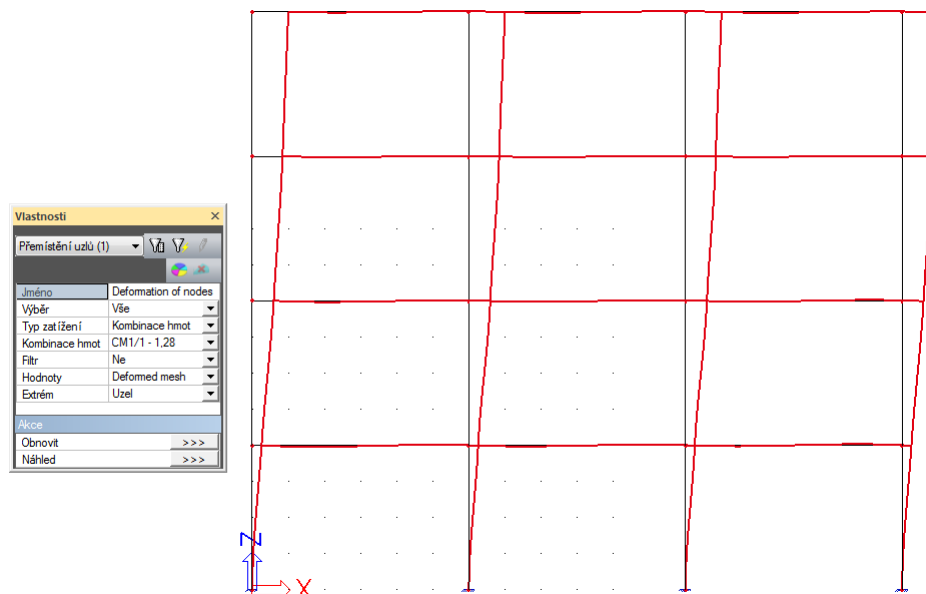


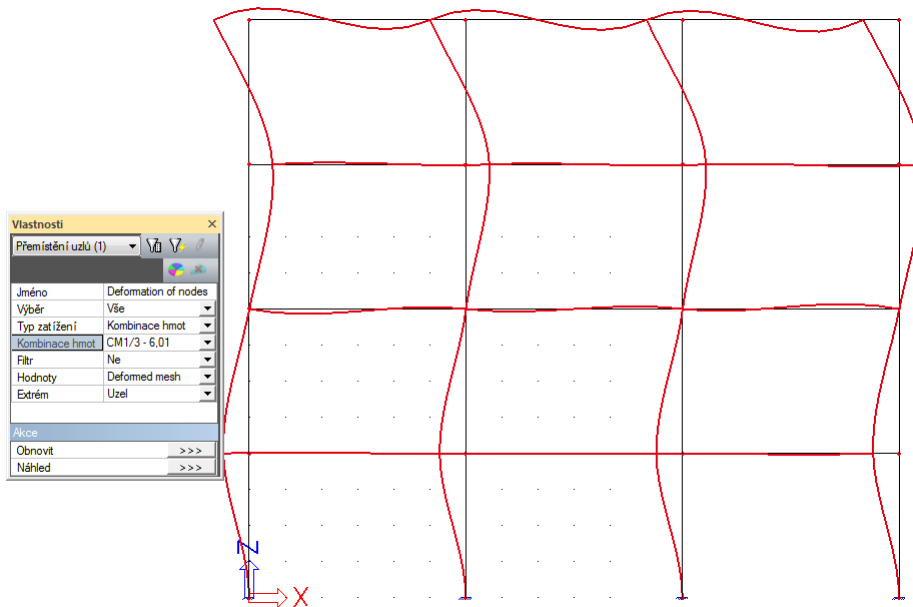
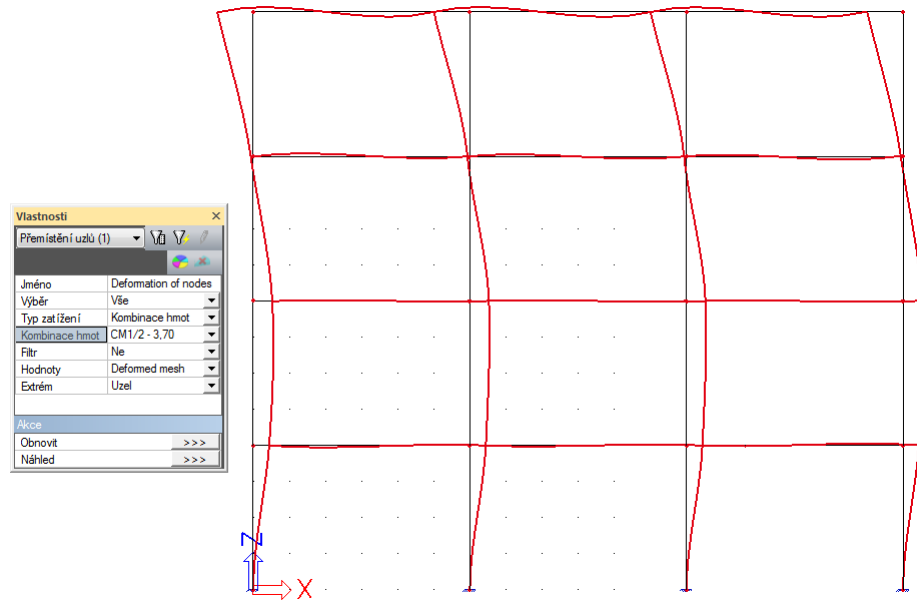
Krok 7: Nyní lze provést výpočet **Vlastních tvarů** pomocí funkce **Výpočet, síť > Výpočet**. Získáme následující výsledky:

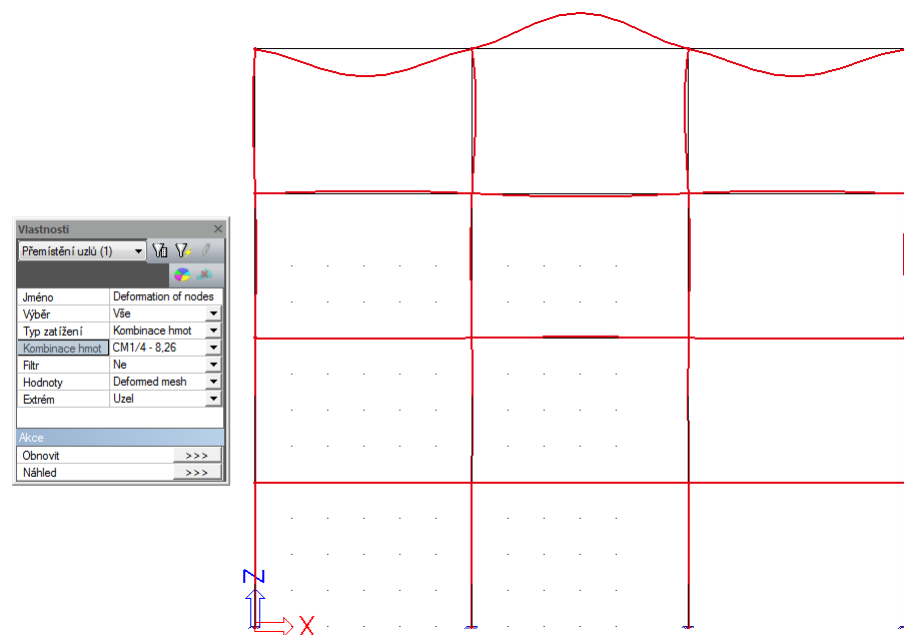
Vlastní frekvence

N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Kombinace hmot : CM1				
1	1,28	8,01	64,19	0,78
2	3,70	23,26	541,06	0,27
3	6,01	37,76	1425,66	0,17
4	8,26	51,89	2692,46	0,12

Odpovídající vlastní tvary jsou:







Protokol o výpočtu pro výpočet **Vlastních frekvencí** obsahuje následující informace:

Protokol o výpočtu

Calc protokol						
Výpočet vlastních tvarů						
Počet 2D prvků	0					
Počet 1D prvků	280					
Počet uzlů sítě	272					
Počet rovnic	1632					
Kombinace skupin hmot	MK 1 CM1					
Počet frekvencí	4					
Spuštění výpočtu	28.12.2010 09:32					
Konec výpočtu	28.12.2010 09:32					
Suma hmot						
	[kg]					
	X					
	Y					
	Z					
Kombinace skupin hmot 1	208578.62					
	0.00					
	208578.62					
Souč. participace tvaru						
Režim	Omega	Perioda	Frek. [Hz]	Wxi / Wxtot	Wyi / Wytot	Wzi / Wztot
1	8.0122	0.7842	1.2752	0.8347	0.0000	0.0000
2	23.2614	0.2701	3.7022	0.0979	0.0000	0.0000
3	37.7589	0.1664	6.0095	0.0422	0.0000	0.0000
4	51.8905	0.1211	8.2586	0.0000	0.0000	0.0019
				0.9748	0.0000	0.0019

Součet hmot lze spočítat následovně:

Z výkazu materiálu dostaneme, že hmotnost rámu je 40 500kg.

Výkaz materiálu

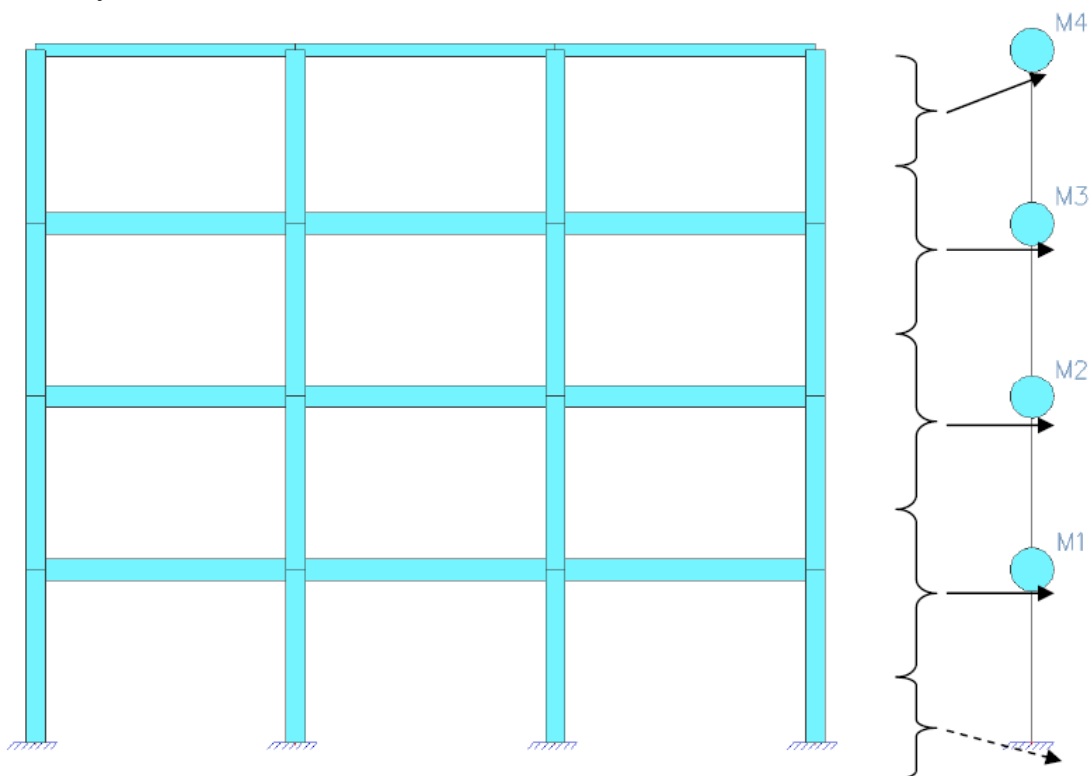
Jméno	Hmotnost [kg]	Povrch [m ²]	Objem [mm ³]
Celkový součet :	40500,00	193,200	1,6200e+10

Pro čtyři spodní sloupy je polovina hmoty prutového prvku soustředěna do podpory a neúčastní se volného kmitání.

- Délka sloupu je 4m.
 - Protože bylo použito 10 prutových prvků, je délka jednoho prutového prvku $4\text{m}/10 = 0,4\text{m}$.
 - Délka poloviny prutového prvku je $0,4\text{ m} / 2 = 0,2\text{ m}$.
 - Průřezová plocha sloupu je $0,135\text{ m}^2$ a objemová hmotnost $2\,500\text{ kg/m}^3$.
 - ⇒ Hmotnost sloupů neuvažovaná ve výpočtu je: $4 \times 0,135\text{ m}^2 \times 0,2\text{ m} \times 2\,500\text{ kg/m}^3 = 270\text{ kg}$
 - ⇒ Vlastní tíha neuvažovaná ve výpočtu je: $40\,500\text{ kg} - 270\text{ kg} = 40\,230\text{ kg}$
 - Pro MG1 je hmota podlah $9 \times 2\,548,42\text{ kg/m} \times 6\text{ m} = 137\,614,68\text{ kg}$.
 - Pro MG1 je hmota střechy $3 \times 1\,019,37\text{ kg/m} \times 6\text{ m} = 18\,348,66\text{ kg}$.
 - Pro MG2 je hmota užitných zatížení $9 \times 1\,529,05\text{ kg/m} \times 6\text{ m} = 82\,568,7\text{ kg}$.
- Avšak zohledněno je pouze 15 % $\Rightarrow 0,15 \times 82\,568,7\text{ kg} = 12\,385,31\text{ kg}$.
- ⇒ Kmitající hmota = $40\,230\text{ kg} + 137\,614,68\text{ kg} + 18\,348,66\text{ kg} + 12\,385,31\text{ kg} = \mathbf{208\,578,65\text{kg}}$

Ruční výpočet

Abychom mohli zkontrolovat výsledky spočítané programem, spočteme nejnižší vlastní frekvenci konstrukce pomocí Rayleighovy metody. Jak již bylo uvedeno u předchozího příkladu, je rám idealizován konzolou.



Hmoty **M1**, **M2** a **M3** lze spočítat následovně:

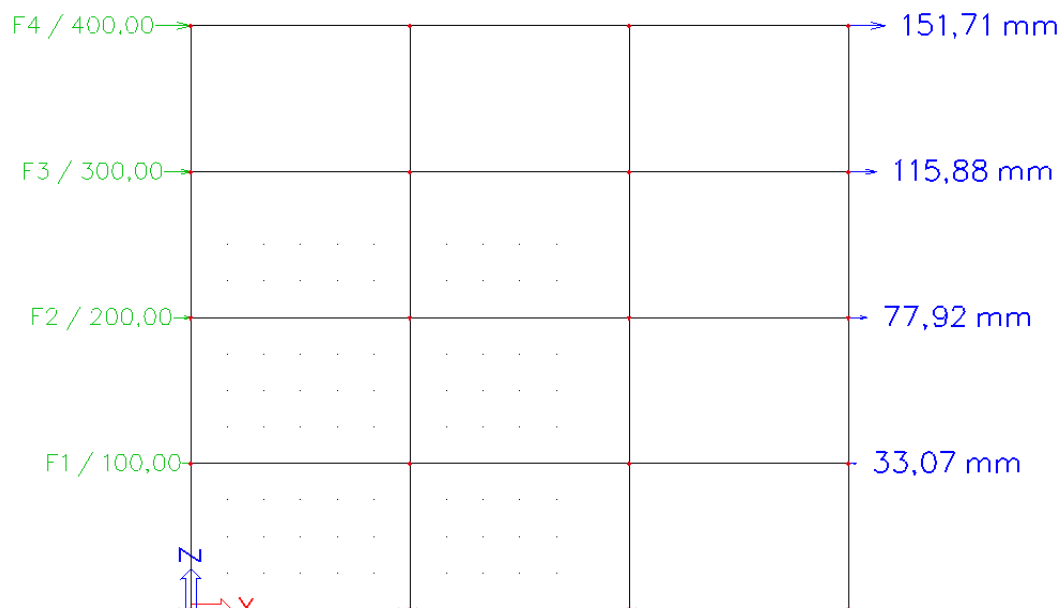
- Vlastní tíha tří podlahových nosníků a čtyř sloupů:
 - ⇒ $3 \times 0,125\text{ m}^2 \times 2\,500\text{ kg/m}^3 \times 6\text{ m} = 5\,625\text{ kg}$
 - ⇒ $4 \times 0,135\text{ m}^2 \times 2\,500\text{ kg/m}^3 \times 4\text{ m} = 5\,400\text{ kg}$

- ⇒ $5\,65\text{ kg} - 5\,400\text{ kg} = 11\,025\text{ kg}$
- Tíha podlahy skupiny hmot MG1:
 - ⇒ $3 \times 2\,548,42\text{ kg/m} \times 6\text{ m} = 45\,871,56\text{ kg}$
- Tíha užitečného zatížení skupiny hmot MG2 (15 %):
 - ⇒ $0,15 \times 3 \times 1\,529,05\text{ kg/m} \times 6\text{ m} = 4\,128,44\text{ kg}$
- Celkem: $11\,025\text{ kg} + 45\,871,56\text{ kg} + 4\,128,44\text{ kg} = 61\,024,995\text{ kg}$

Hmotu **M4** lze spočítat následovně:

- Vlastní tíha tří podlahových nosníků a polovina tíhy čtyř sloupů:
 - ⇒ $3 \times 0,045\text{ m}^2 \times 2\,500\text{ kg/m}^3 \times 6\text{ m} = 2\,025\text{ kg}$
 - ⇒ $0,5 \times 4 \times 0,135\text{ m}^2 \times 2\,500\text{ kg/m}^3 \times 4\text{ m} = 2\,700\text{ kg}$
 - ⇒ $2\,025\text{ kg} - 2\,700\text{ kg} = 4\,725\text{ kg}$
- Tíha střechy skupiny hmot MG1:
 - ⇒ $3 \times 1\,019,37\text{ kg/m} \times 6\text{ m} = 18\,348,66\text{ kg}$
- Celkem: $4\,725\text{ kg} - 18\,348,66\text{ kg} = 23\,073,66\text{ kg}$

Abychom spočítali vodorovnou deformaci **d_i** od lineárně se zvyšující síly **F_i** na úrovni každého podlaží, je programem spočten statický zatěžovací stav obsahující síly **100 kN, 200 kN, 300 kN a 400 kN**. Získáme následující uzlové deformace:



- ⇒ $F1 = 100\text{ kN} = 100\,000\text{ N}$
- ⇒ $F2 = 200\text{ kN} = 200\,000\text{ N}$
- ⇒ $F3 = 300\text{ kN} = 300\,000\text{ N}$
- ⇒ $F4 = 400\text{ kN} = 400\,000\text{ N}$
- ⇒ $d1 = 33,07\text{ mm} = 0,03307\text{ m}$
- ⇒ $d2 = 77,92\text{ mm} = 0,07792\text{ m}$
- ⇒ $d3 = 115,88\text{ mm} = 0,11588\text{ m}$

$$\Rightarrow d4 = 151,71 \text{ mm} = 0,15171 \text{ m}$$

Aplikujeme vzorec (2.8):

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{100000N \cdot 0,03307m + 200000N \cdot 0,07792m + 300000N \cdot 0,11588m + 400000N \cdot 0,15171m}{61024,995kg \cdot (0,03307m)^2 + 61024,995kg \cdot (0,07792m)^2 + 61024,995kg \cdot (0,11588m)^2 + 23073,66kg \cdot (0,15171m)^2}}$$

$$f = \mathbf{1,27 \text{ Hz}}$$

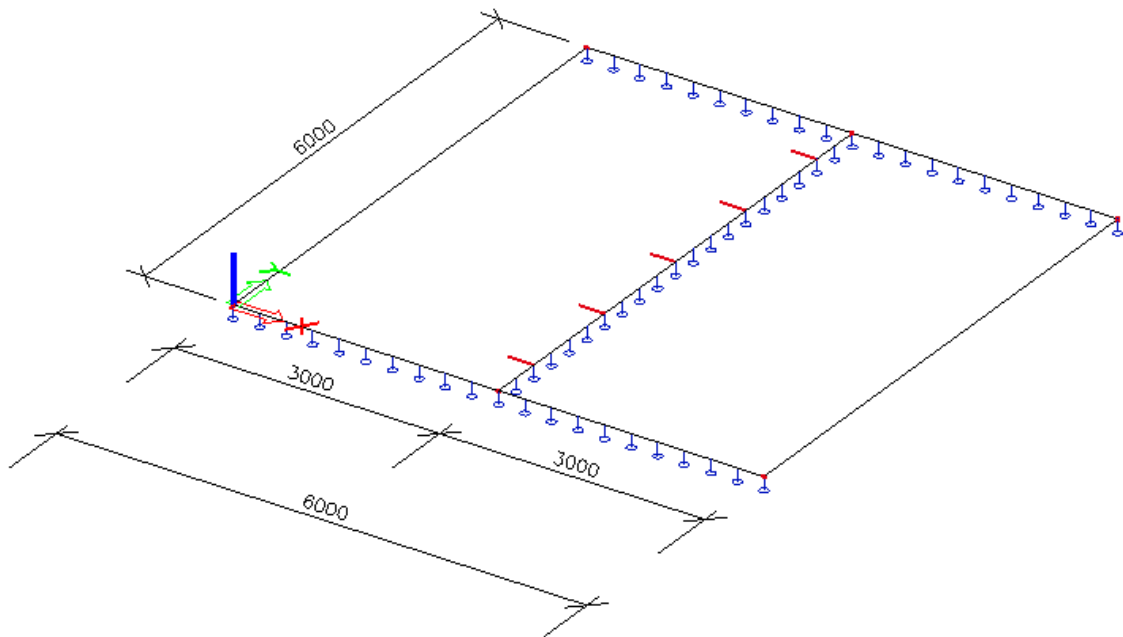
Tento výsledek odpovídá frekvenci **1,28 Hz** vypočtené programem.

2.4 Desky

Poslední odstavec této kapitoly popisuje postup výpočtu vlastního kmitání u desek. Aplikovaná metoda je zcela shodná s tou pro rámy. Vše je ukázáno v následujícím příkladu:

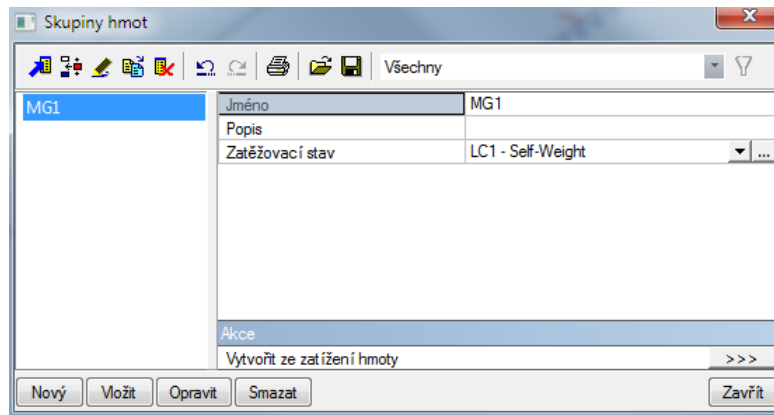
Příklad 4: Free_Vibration_4.esa

V tomto příkladu budeme modelovat obdélníkovou desku o více polích. Délka a šířka desky je **6 m**. Tloušťka desky je **0,06 m** a je vyrobena z materiálu **S235** podle **EC-EN**. Na dvou okrajích je deska prostě podepřena, na dvou okrajích je volná. Uprostřed desky je umístěna liniová podpora, která je kolmá na oba prostě podepřené okraje. Je vytvořen jeden statický zatěžovací stav: **vlastní tíha** desky.



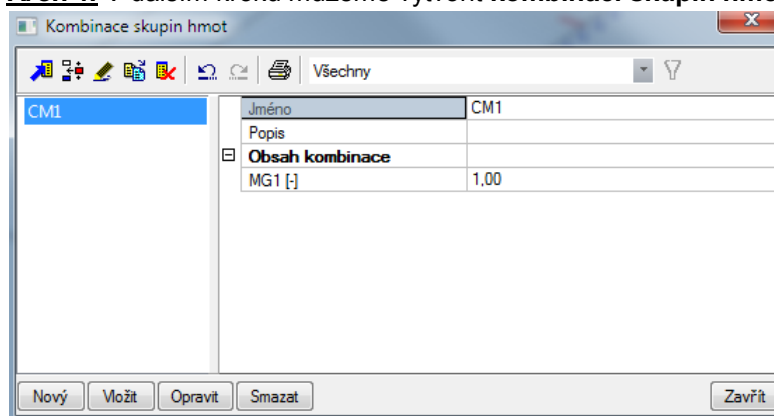
Krok 1: Prvním krokem v dynamickém výpočtu je aktivace funkcionality **Dynamika** na záložce **Funkcionalita** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**.

Kroky 2 a 3: Druhým krokem je vytvoření **skupiny hmot**.

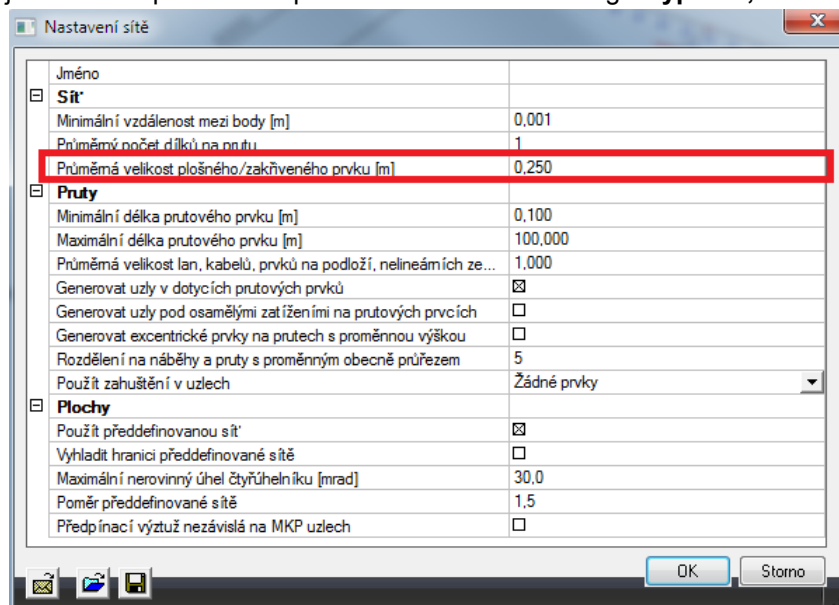


Protože výpočet vlastního kmitání desky bude proveden pro vlastní tíhu desky, není třeba zadávat žádné další hmoty.

Krok 4: V dalším kroku můžeme vytvořit kombinaci skupin hmot.

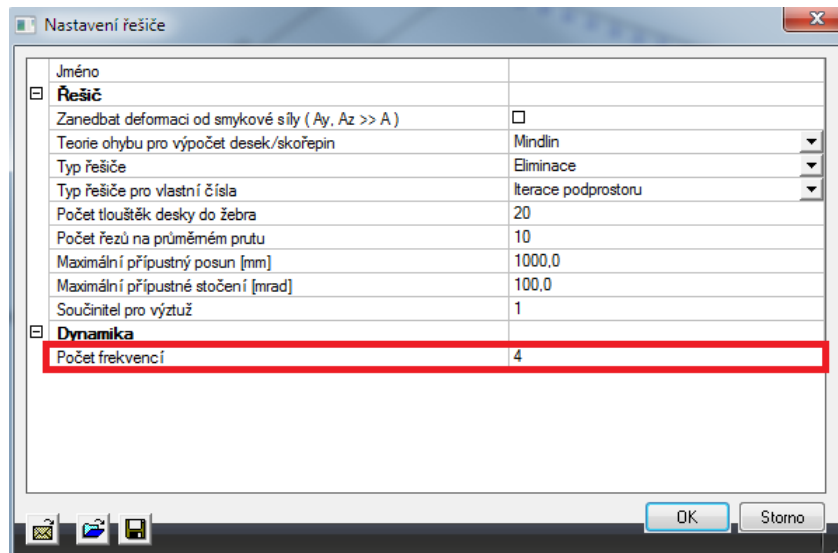


Krok 5: Pro získání přesných dynamických výpočtů zjourníme síť konečných prvků. Stejně jako u rámu provedeme potřebné nastavení v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení sítě**.



Průměrná velikost plošných prvků je nastavena na **0,25 m**.

Krok 6: Posledním krokem před spuštěním výpočtu je nastavení počtu počítaných vlastních tvarů. Výchozí hodnota v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení řešiče** je **4**. To je pro náš příklad dostačující.

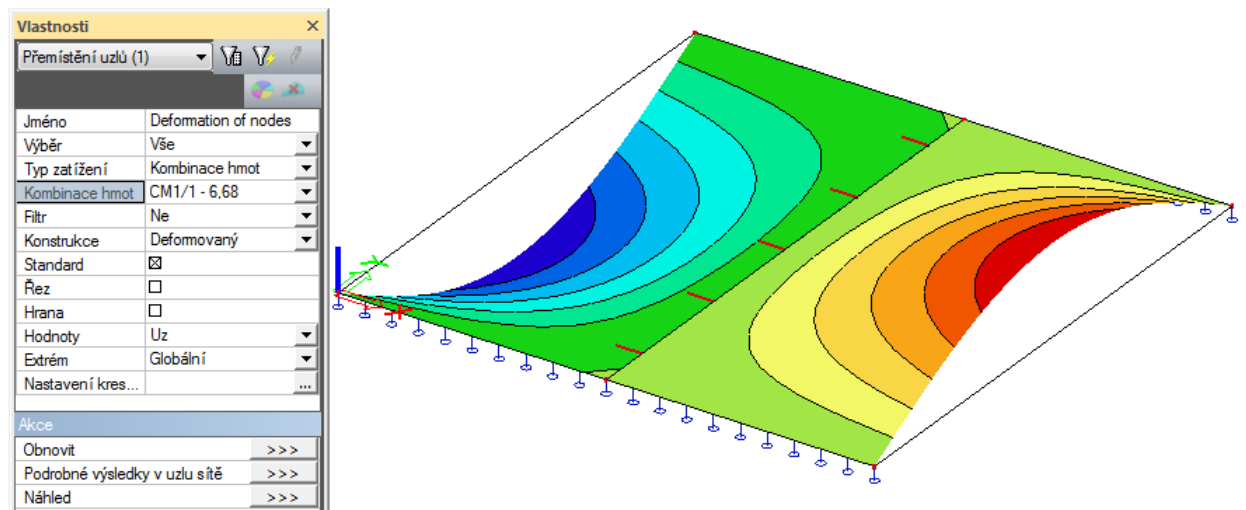


Krok 7: Nyní lze provést výpočet **Vlastních tvarů** pomocí funkce **Výpočet, síť > Výpočet**. Získáme následující výsledky:

Vlastní frekvence

N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Kombinace hmot : CM1				
1	6,68	41,96	1760,78	0,15
2	9,44	59,32	3518,37	0,11
3	19,39	121,85	14846,46	0,05
4	21,05	132,25	17489,08	0,05

Stejně jako pro rámy lze i zde vlastní tvary zobrazit pomocí funkce **Přemístění uzlů**, které je nyní ve větvi **plošné prvky**. **Deformovaná konstrukce** pro hodnotu **Uz** vypadá následovně:



Vlastnosti

Přemístění uzlů (1)

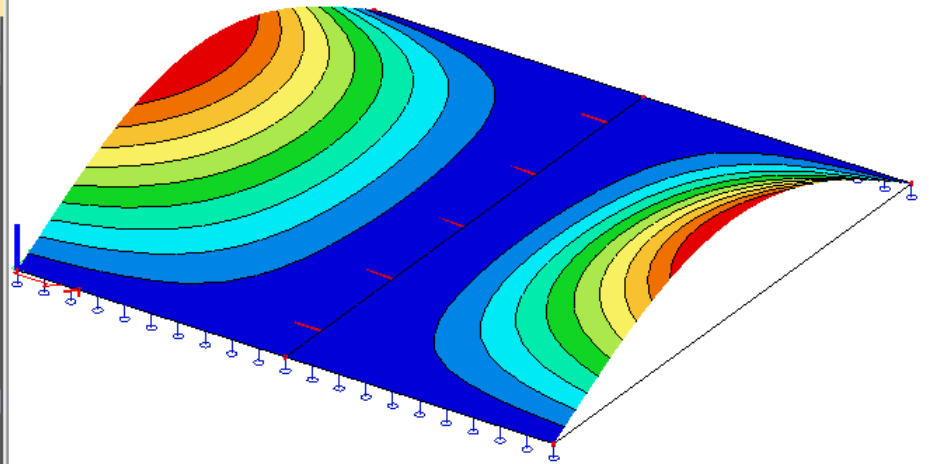
Jméno	Deformation of nodes
Výběr	Vše
Typ zatížení	Kombinace hmot
Kombinace hmot	CM1/2 - 9,44
Filtr	Ne
Konstrukce	Deformovaný
Standard	<input checked="" type="checkbox"/>
Řez	<input type="checkbox"/>
Hrana	<input type="checkbox"/>
Hodnoty	Uz
Extrém	Globální
Nastavení kres...	...

Akce

Obnovit >>>

Podrobné výsledky v uzlu sítě >>>

Náhled >>>



Vlastnosti

Přemístění uzlů (1)

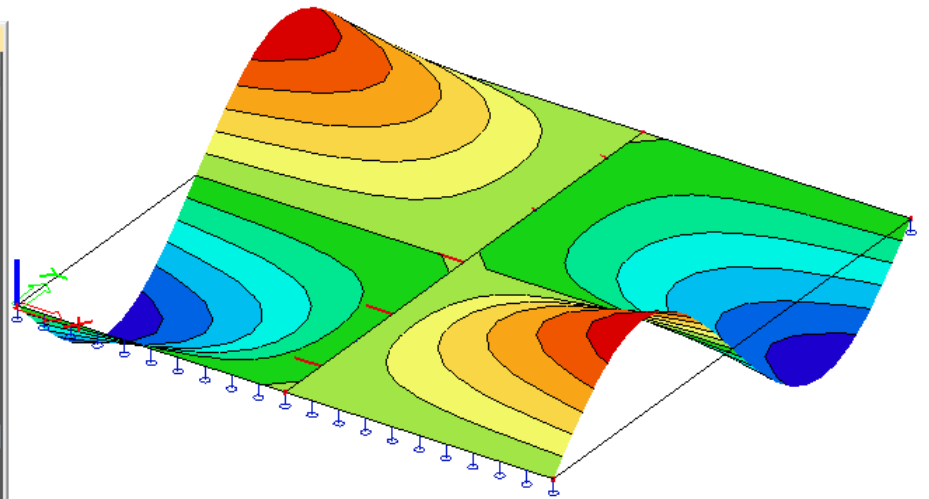
Jméno	Deformation of nodes
Výběr	Vše
Typ zatížení	Kombinace hmot
Kombinace hmot	CM1/3 - 19,39
Filtr	Ne
Konstrukce	Deformovaný
Standard	<input checked="" type="checkbox"/>
Řez	<input type="checkbox"/>
Hrana	<input type="checkbox"/>
Hodnoty	Uz
Extrém	Globální
Nastavení kres...	...

Akce

Obnovit >>>

Podrobné výsledky v uzlu sítě >>>

Náhled >>>



Vlastnosti

Přemístění uzlů (1)

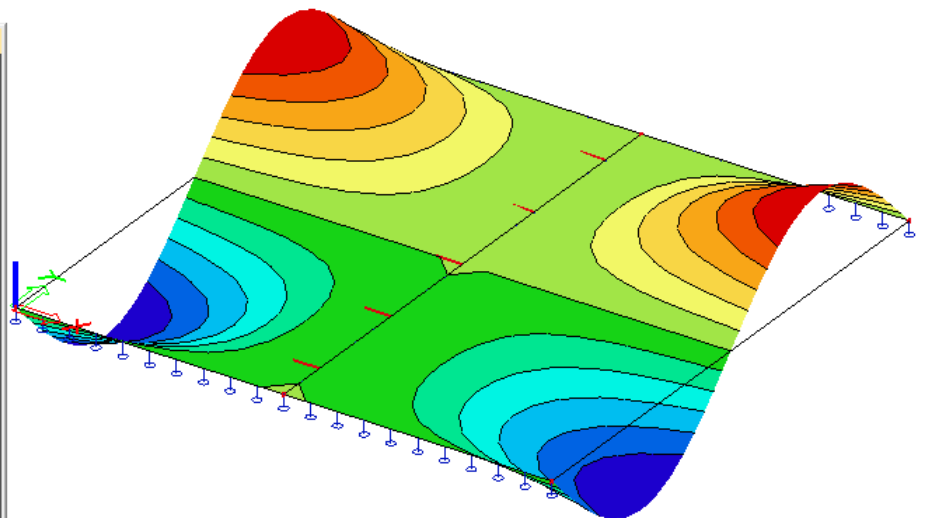
Jméno	Deformation of nodes
Výběr	Vše
Typ zatížení	Kombinace hmot
Kombinace hmot	CM1/4 - 21,05
Filtr	Ne
Konstrukce	Deformovaný
Standard	<input checked="" type="checkbox"/>
Řez	<input type="checkbox"/>
Hrana	<input type="checkbox"/>
Hodnoty	Uz
Extrém	Globální
Nastavení kres...	...

Akce

Obnovit >>>

Podrobné výsledky v uzlu sítě >>>

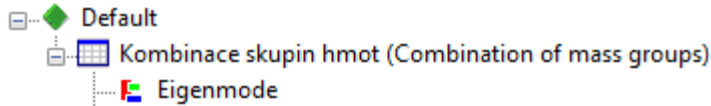
Náhled >>>



Poznámka

Funkce **Plošné prvky > Přemístění uzlů > Deformovaná síť** ukazuje deformaci plošných i prutových prvků. Díky tomu lze zobrazit vlastní tvary pro konstrukci sestávající z obou typů prvků, např. v případě projektů typu Obecný XYZ.

Pro rychlé vygenerování všech vlastních tvarů lze použít Dokument: Obrázek jednoho vlastního tvaru se vnoří pod kombinace skupin hmot:



Tímto způsobem jsou všechny vlastní tvary vygenerovány automaticky.

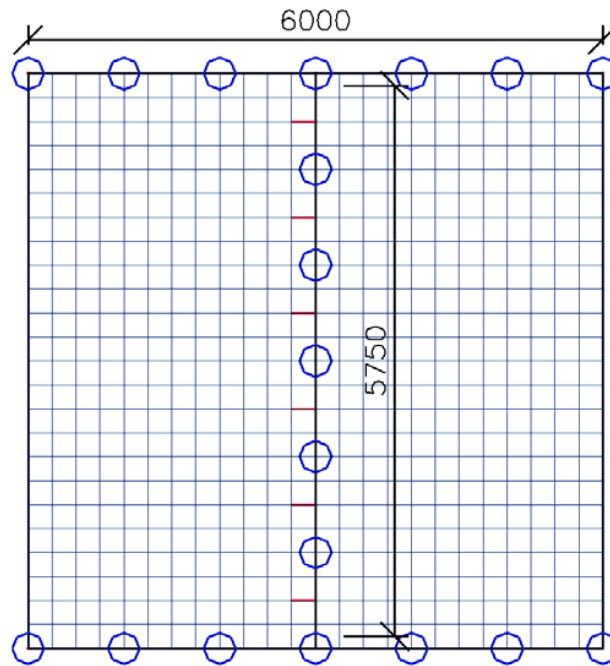
Protokol o výpočtu pro výpočet **vlastní frekvence** ukazuje, že je zohledněn následující součet hmot:

Suma hmot

[kg]	X	Y	Z
Kombinace skupin hmot 1	0.00	0.00	15572.44

Danou hodnotu lze spočítat následovně:

- Celková hmotnost desky je $6 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 0,06 \text{ m} \times 7 \text{ 850 kg/m}^3 = 16 \text{ 956 kg}$
- Polovina hmoty prvků podél dvou vnějších podepřených okrajů je zavedena do podpor a nekmitá. Protože velikost sítě je nastavena na 0,25 m, je polovina velikosti plošného prvku rovna 0,125 m.
 - ⇒ $2 \times 6 \text{ m} \times 0,125 \text{ m} \times 0,06 \text{ m} \times 7 \text{ 850 kg/m}^3 = 706,5 \text{ kg}$
- To samé platí pro vnitřní hranu, ale hmota dvou prvků u počátečního a koncového uzlu hrany byla již zahrnuta do výše uvedeného výpočtu pro vnější podepřené hrany. Tím dostaneme délku $6 \text{ m} - 0,125 \text{ m} - 0,125 \text{ m} = 5,75 \text{ m}$. Uvedená délka je ukázána na následujícím obrázku.
 - ⇒ $2 \times 5,75 \text{ m} \times 0,125 \text{ m} \times 0,06 \text{ m} \times 7 \text{ 850 kg/m}^3 = 677,06 \text{ kg}$



- Celková hmota uvažovaná ve výpočtu volného kmitání:

$$\Rightarrow 16\,956 \text{ kg} - 706,5 - 677,06 = \mathbf{15\,572,44 \text{ kg}}$$

Ruční výpočet

Abychom mohli zkontrolovat výsledky spočítané programem, spočteme vlastní frekvence desky ručně.

Zde použitá metoda je popsána v literatuře [14]. V této publikaci je vlastní frekvence desky o více polích vyjádřena pomocí bezrozměrného parametru λ .

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (2.10)$$

Kde: ω = kruhová frekvence
 L = vzdálenost dvou prostě podepřených vnějších okrajů
 ρ = hustota materiálu desky
 h = tloušťka desky

$$D = \text{ohybová tuhost desky} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.11)$$

E = Youngův modul pružnosti
 ν = Poissonův součinitel

V našem případě jsou materiálové a další vlastnosti tyto:

$L = 6 \text{ m}$
 $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
 $h = 0,06 \text{ m}$
 $E = 210.000 \text{ N/mm}^2 = 2,1 \text{ e}^{11} \text{ N/m}^2$
 $\nu = 0,3$

$$D = \frac{2,1 \text{ e}^{11} \text{ N/m}^2 \cdot (0,06 \text{ m})^3}{12 \cdot (1 - 0,3^2)} = 4153846,15 \text{ Nm}$$

Hodnoty parametru λ pro první čtyři vlastní tvary pro desku se dvěma prostě podepřenými okraji a dvěma volnými okraji a pro poměr h/L rovný 0,01 s polohou vnitřní hrany 0,5L jsou uvedeny ve [14].

- 1. vlastní tvar: $\lambda = 1,6309$
- 2. vlastní tvar: $\lambda = 2,3050$
- 3. vlastní tvar: $\lambda = 4,7253$
- 4. vlastní tvar: $\lambda = 5,1271$

Použijeme-li tyto parametry v rovnici (2.10), můžeme vypočítat kruhové frekvence:

- 1. vlastní tvar: $\omega = 41,99 \text{ rad/s}$ $f = \mathbf{6,68 \text{ Hz}}$
- 2. vlastní tvar: $\omega = 59,34 \text{ rad/s}$ $f = \mathbf{9,45 \text{ Hz}}$
- 3. vlastní tvar: $\omega = 121,66 \text{ rad/s}$ $f = \mathbf{19,36 \text{ Hz}}$
- 4. vlastní tvar: $\omega = 132 \text{ rad/s}$ $f = \mathbf{21,01 \text{ Hz}}$

Výsledky se shodují s výsledky získanými programem:

- 1. vlastní tvar: $f = \mathbf{6,68 \text{ Hz}}$
- 2. vlastní tvar: $f = \mathbf{9,44 \text{ Hz}}$
- 3. vlastní tvar: $f = \mathbf{19,39 \text{ Hz}}$
- 4. vlastní tvar: $f = \mathbf{21,05 \text{ Hz}}$

Vlastní frekvence

N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Kombinace hmot : CM1				
1	6,68	41,98	1760,78	0,15
2	9,44	59,32	3518,37	0,11
3	19,39	121,85	14846,46	0,05
4	21,05	132,25	17489,08	0,05

3. Vynucené kmitání: Harmonické zatížení

V této kapitole se podíváme na vynucené kmitání. Přesněji řečeno, konstrukce bude zatížena vnějším harmonickým zatížením, které konstrukci rozkmitá.

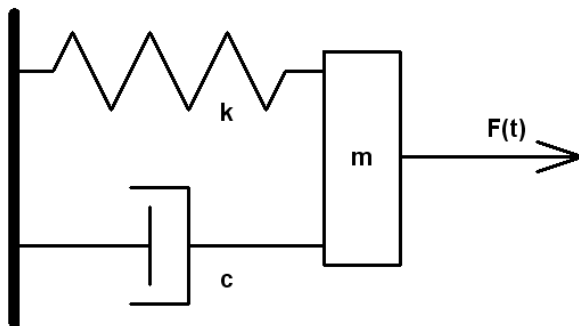
Výpočet vynuceného kmitání může být vyžadován k posouzení budovy v blízkosti železnice nebo hlavní dopravní tepny, k posouzení vibrací od strojního zařízení, k ověření integrity podlahy zatížené cvičenci aerobiku apod.

Stejně jako v předešlé kapitole i zde nejprve probereme teorii. Teorie potom bude ilustrována na příkladech, které budou opět ověřeny ručním výpočtem.

3.1 Teorie

Pro pochopení toho, co se děje při dynamické analýze složité konstrukce složené z konečných prvků, si podrobně probereme vynucené kmitání systému s jedním stupněm volnosti. Úplný přehled lze najít v [1].

Uvažujme systém podle obrázku:



Těleso o hmotnosti m se může pohybovat v jednom směru. Pružina o konstantní tuhosti k připevněná k tělesu je na svém druhém konci vetknutá. Hmota je rovněž tlumena s tlumicí kapacitou c . Na hmotu působí vnější časově proměnná síla $F(t)$.

Pohybovou rovnici lze zapsat ve tvaru:

$$m \cdot \ddot{y}(t) + c \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = F(t) \quad (3.1)$$

Představuje-li působící síla v tomto systému harmonické zatížení, lze rovnici (3.1) přepsat následujícím způsobem:

$$m \cdot \ddot{y}(t) + c \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = F \cdot \sin(\nu \cdot t) \quad (3.2)$$

Kde: F = amplituda harmonického zatížení

ν = kruhová frekvence harmonického zatížení

Řešení této rovnice je:

$$y(t) = e^{-\xi \omega t} \cdot (A \cos(\omega_D \cdot t) + B \sin(\omega_D \cdot t)) + Y_S \cdot \frac{\sin(\nu \cdot t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.3)$$

Kde:

$$Y_S = \frac{F}{k} \quad \text{Statický průhyb} \quad (3.4)$$

$$\xi = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega} \quad \text{Součinitel útlumu} \quad (3.5)$$

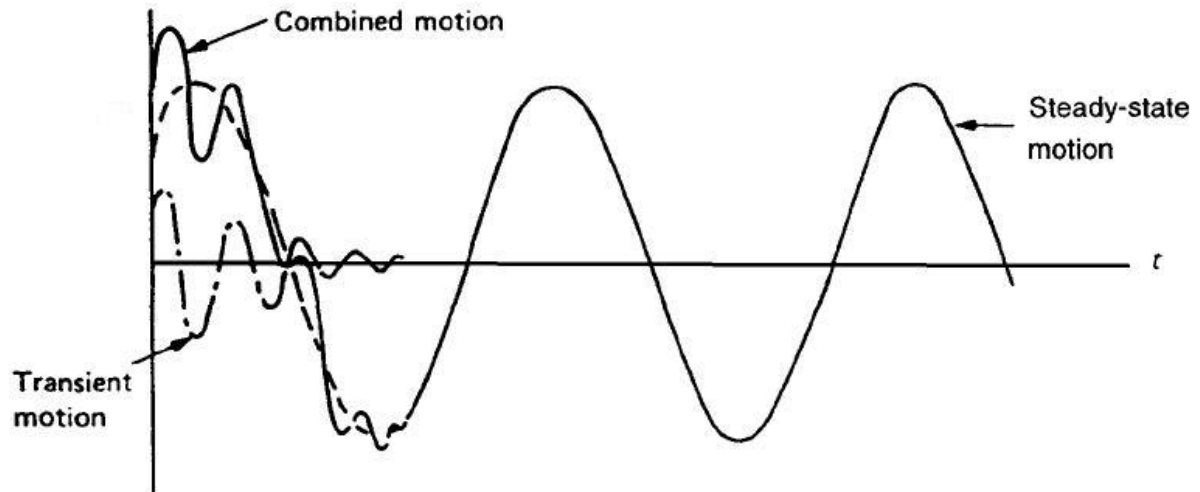
$$\omega_D = \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{Tlumená kruhová frekvence} \quad (3.6)$$

$$\tan(\theta) = \frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2} \quad (3.7)$$

$$r = \frac{v}{\omega} \quad \text{Poměr frekvencí} \quad (3.8)$$

Úhel θ naznačuje, že vektor přemístění je zpožděný oproti vektoru síly, to znamená, že pohyb nastává po aplikování zatížení. A a B jsou konstanty, které se určí z počátečního přemístění a rychlosti.

První člen rovnice (3.3) se nazývá *přechodový stav*. Druhý člen se nazývá *ustálené kmitání*. Oba členy jsou ukázány na následujícím obrázku:



Legenda:

Transient motion = přechodový stav

Steady-state motion = ustálené kmitání

Combined motion = kombinované kmitání

Amplituda přechodové odezvy se zmenšuje exponenciálně ($e^{-\xi \omega t}$). Proto je u většiny praktických aplikací tento člen zanedbáván a celková odezva $y(t)$ se uvažuje rovna ustálenému kmitání (několik period po aplikování zatížení). Rovnici (3.3) lze zapsat ve vhodnějším tvaru:

$$\frac{Y}{Y_s} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3.9)$$

$\frac{Y}{Y_s}$ je známo jako dynamický součinitel zvětšení, protože Y_s je statický průhyb systému od stacionární síly F a Y je dynamická amplituda.

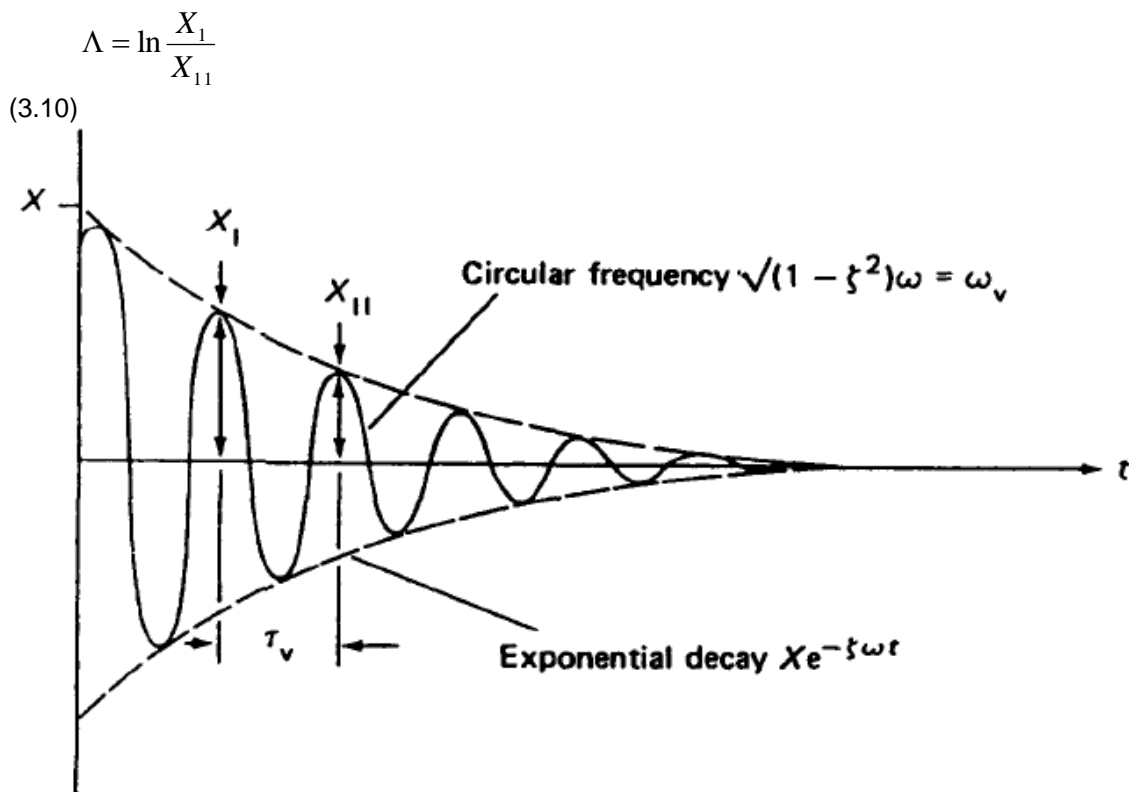
Důležitost mechanických vibrací se objevuje zejména u velkého poměru $\frac{Y}{Y_s}$, který se objevuje v praxi tehdy, je-li poměr frekvencí blízký jedničce: to znamená, že malé harmonické zatížení může produkovat velkou amplitudu kmitání. Tento jev je znám jako *rezonance*. V takovém případě nedosahuje dynamická amplituda nekonečné hodnoty, ale limitní hodnoty $\frac{Y_s}{2\xi}$.

3.2 Harmonické zatížení ve Scia Engineer

Ve Scia Engineer lze harmonické zatížení zadat po vytvoření kombinace skupin hmot. Z toho plyne, že kroky, které se provádějí u výpočtu volného kmitání, se provedou i zde a jsou rozšířeny o zadání vlastností harmonického zatížení.

V souladu s teorií je harmonické zatížení definováno budicí frekvencí a amplitudou. Pro zadání součinitele útlumu konstrukce se použije **logaritmický dekrement**. [1]

Logaritmický dekrement Λ je přirozený logaritmus poměru jakýchkoli dvou následujících amplitud ve stejném směru. To je ukázáno na následujícím obrázku:



Legenda:

Circular frequency = kruhová frekvence

Exponential decay = exponenciální doznívání

Logaritmický dekrement Λ je se **součinitelem útlumu** ξ svázán následujícím vztahem:

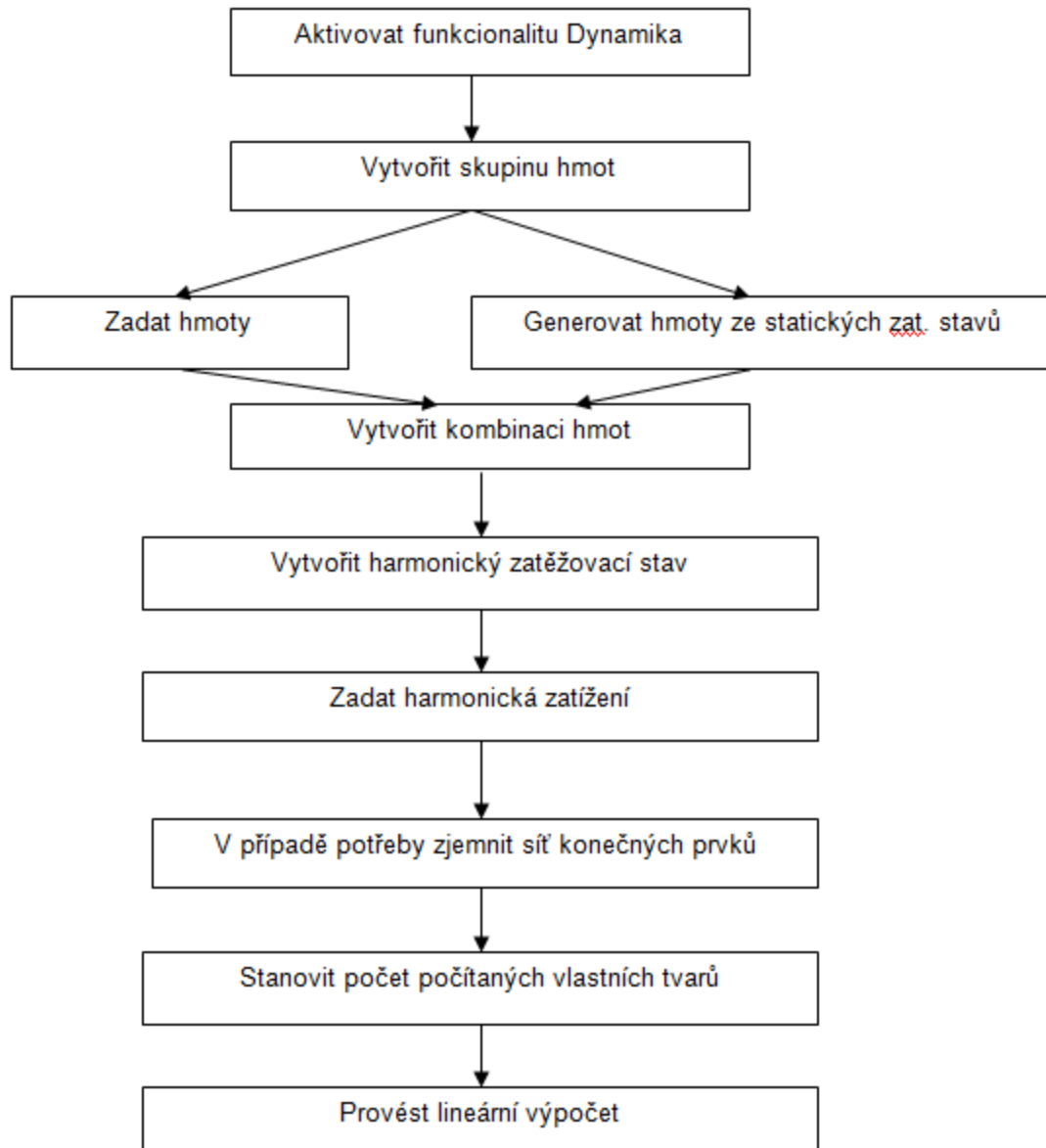
$$\Lambda = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.11)$$

Součinitel útlumu a logaritmický dekrement jsou podrobněji probrány v kapitole 5.

Harmonické zatížení je ve Scia Engineer vždy zadáno jako uzlové zatížení, tj. uzlová síla nebo uzlový moment. V jednom zatěžovacím stavu lze zatížit více uzlů konstrukce, ale frekvence všech impulzů je shodná s budicí frekvencí zadanou pro daný zatěžovací stav.

Jak bylo uvedeno v teoretické části, statické výsledky se vynásobí dynamickým součinitelem. Dynamický výpočet se tak transformuje na ekvivalentní statický výpočet. Proto se provádí lineární statický výpočet. V průběhu výpočtu je také proveden výpočet vlastních frekvencí, protože jeho výsledky jsou potřebné pro výsledky harmonického zatížení.

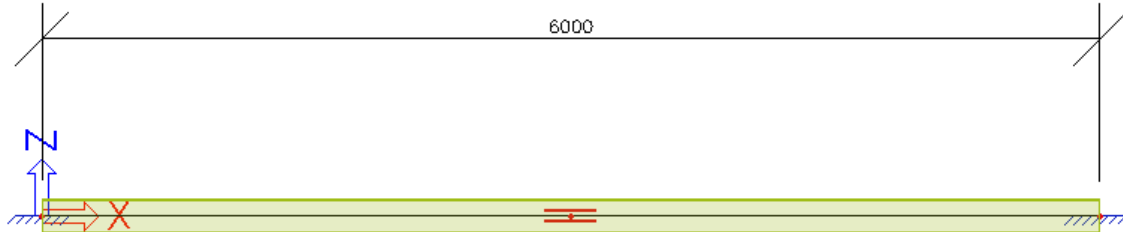
Následující diagram ukazuje kroky potřebné k provedení výpočtu vynuceného kmitání.



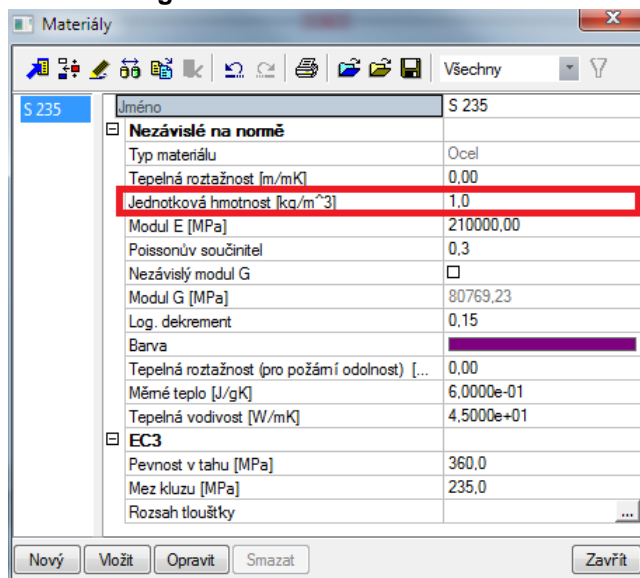
Uvedený diagram je prakticky ilustrován na následujících příkladech.

Příklad 5: Forced_Vibration_1.esa

V tomto příkladu je modelován oboustranně vetknutý nosník. Nosník má průřez **IPE 200**, délku **6 m** a je vyroben z oceli **S235** podle normy **EC-EN**. Doprostřed nosníku byl přidán uzel a do něj bude zadána hmotu **200 kg**.

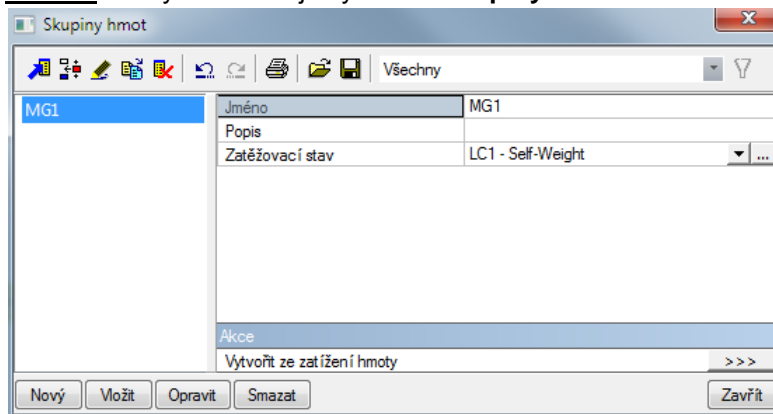


Je vytvořen jeden statický zatěžovací stav: **vlastní tíha** nosníku. Abychom vlastní tíhu při dynamickém výpočtu zanedbali, můžeme v knihovně materiálů nastavit objemovou hmotnost pro **S235** na **1 kg/m³**. Díky tomu bude ověření výsledků ručním výpočtem jednodušší. Hmotu **200 kg** kmitá s frekvencí **5 Hz**. Součinitel útlumu systému je uvažován hodnotou **5 %**.

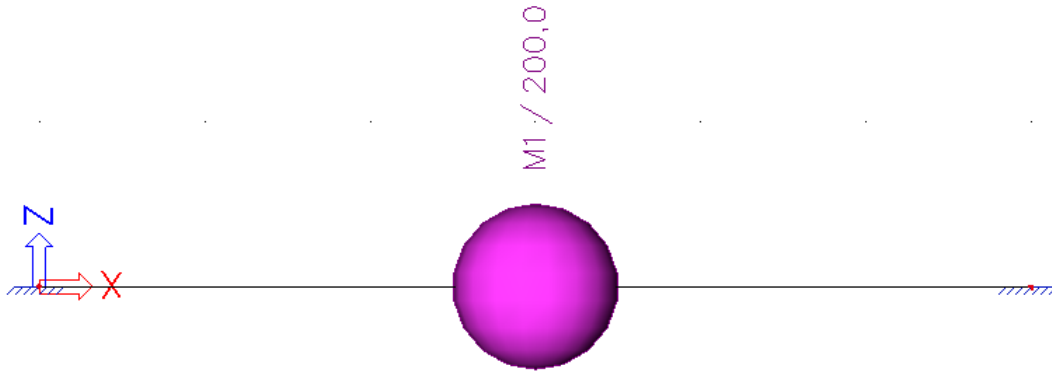


Krok 1: Prvním krokem v dynamickém výpočtu je aktivace funkcionality **Dynamika** na záložce **Funkcionalita** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**.

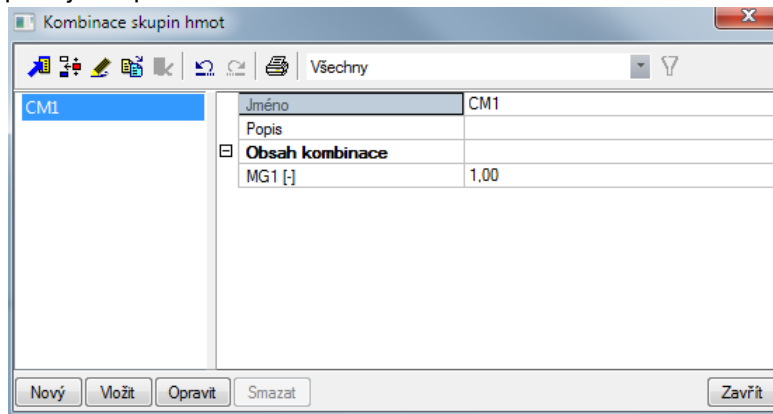
Krok 2: Druhým krokem je vytvoření **skupiny hmot**.



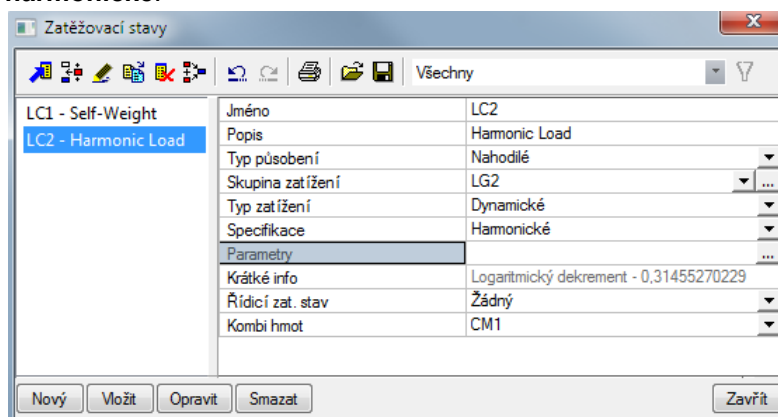
Krok 3: Po vytvoření skupiny hmot zadáme hmotu **200 kg** doprostřed rozpětí nosníku.




Krok 4: V dalším kroku vložíme skupinu hmot do **kombinace skupin hmot**, kterou použijeme pro definici harmonického zatížení.



Krok 5: Po vytvoření **kombinace skupin hmot** můžeme pomocí funkce **Zatěžovací stavy, kombinace > Zatěžovací stavy** definovat **harmonické** zatížení. **Typ působení** zatěžovacího stavu se nastaví na **nahodilé**. **Typ zatížení** pak lze změnit na **dynamické**. V políčku **Specifikace** se pak nastavuje typ dynamického zatížení, v našem případě **harmonické**.



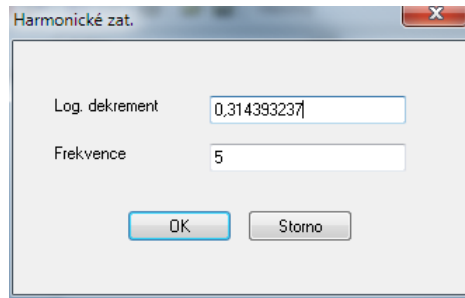
Poslední volba **Kombinace hmot** ukazuje, která **kombinace hmot** bude použita pro výpočet harmonického zatěžovacího stavu.

K nastavení parametrů harmonického zatěžovacího stavu se použije tlačítko  za položkou **Parametry**.

Budící frekvence harmonického zatížení je **5 Hz**. Součinitel útlumu byl zadán hodnotou **5 %**.

Použitím vzorce (3.11) spočteme **logaritmický dekrement**:

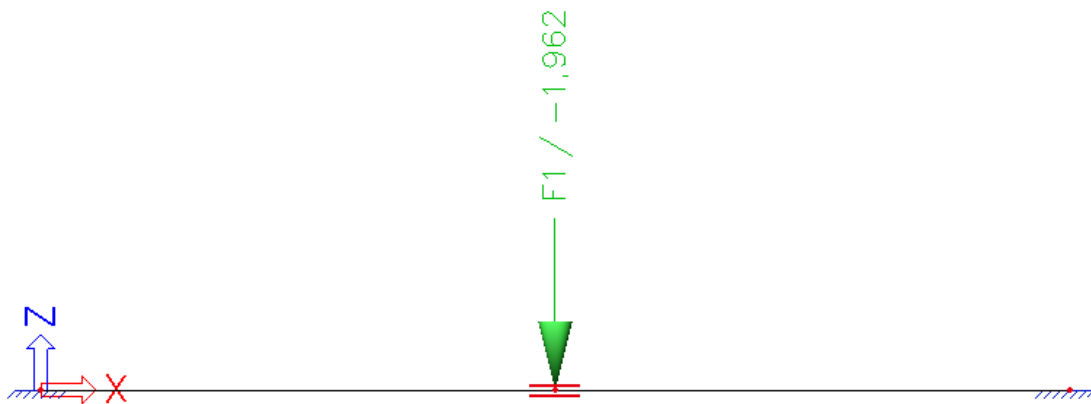
$$\Lambda = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,05}{\sqrt{1-(0,05)^2}} = 0,314393237$$



Krok 6: Parametry zatěžovacího stavu byly definovány. Co ještě zbývá, je zadání amplitudy zatížení.

Hmota byla **200 kg**. To odpovídá zatížení **1,962 kN** při tíhovém zrychlení **9,81 m/s²**.

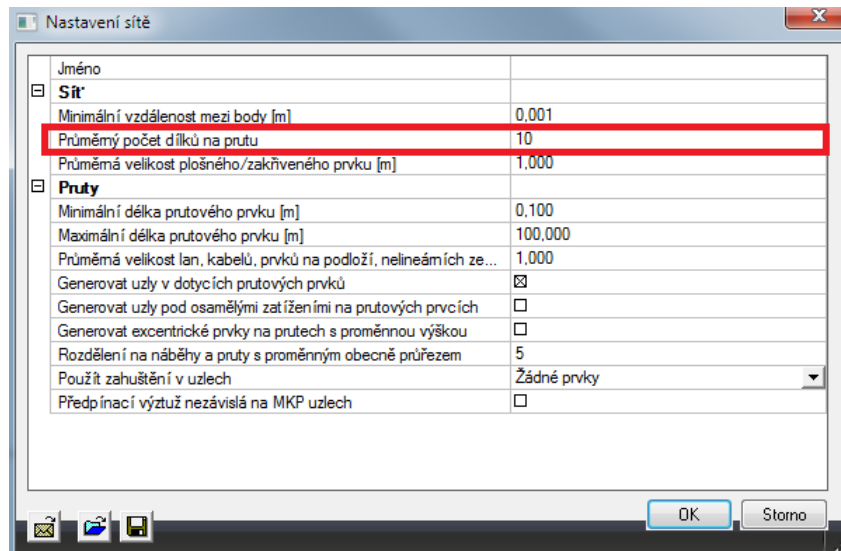
Toto zatížení lze zadat funkcí **Zatížení > Bodové zatížení > V uzlu**.



Poznámka

Jak již bylo uvedeno v odstavci o teorii, v jednom zatěžovacím stavu lze zadat více harmonických zatížení, ale harmonické parametry jako útlum a budicí frekvence se zadávají na úrovni zatěžovacího stavu. To znamená, že například při působení několika harmonických zatížení o různých frekvencích je nutno zadat pro každé zatížení samostatný zatěžovací stav.

Krok 7: Pro získání přesných dynamických výpočtů zjmemíme síť konečných prvků. To lze nastavit v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení sítě**.



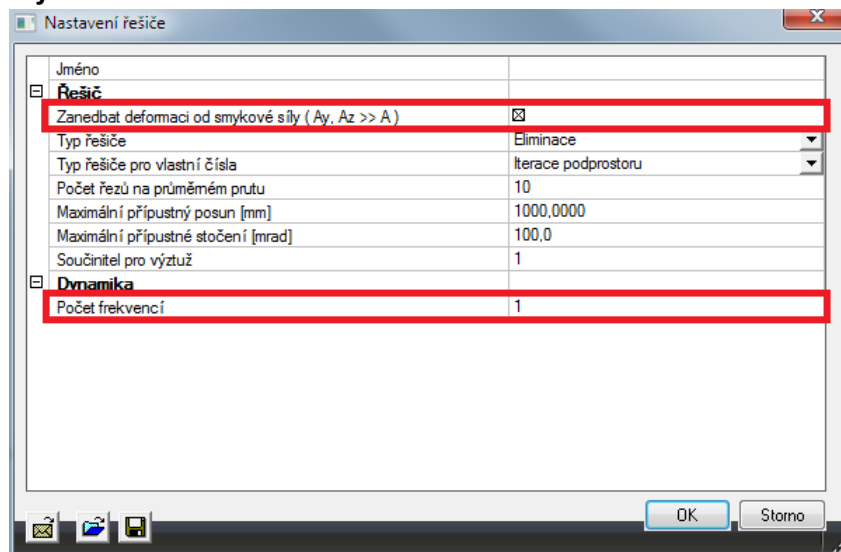
Průměrný počet dílků na prutu se nastaví na 10.

Krok 8: Posledním krokem před spuštěním výpočtu je nastavení počtu počítaných vlastních tvarů.

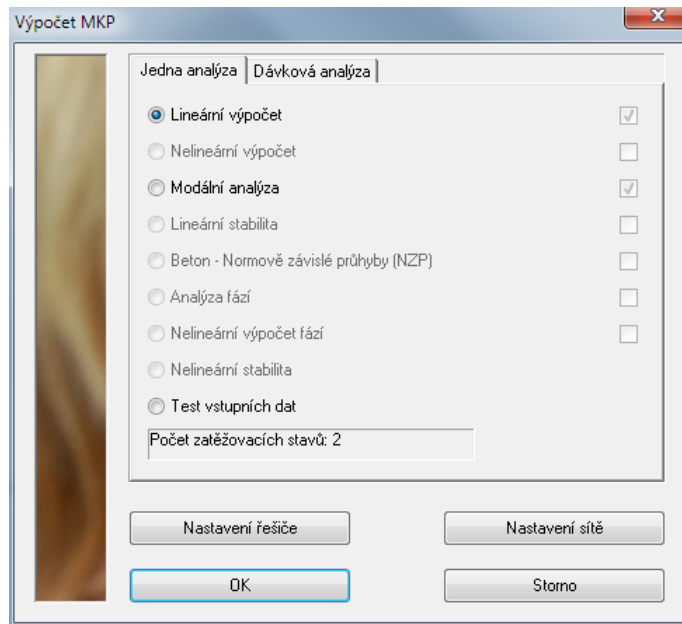
V tomto příkladu je třeba spočítat pouze jeden vlastní tvar a proto počet frekvencí v dialogu

Výpočet, sít' > Nastavení řešiče nastavíme na 1.

Abychom mohli porovnat výsledky s ručním výpočtem, zanedbáme **deformaci od smykové síly**.



Krok 9: Všechny potřebné kroky byly již provedeny a tak lze funkcí **Výpočet, sít' > Výpočet** spustit **lineární výpočet**.

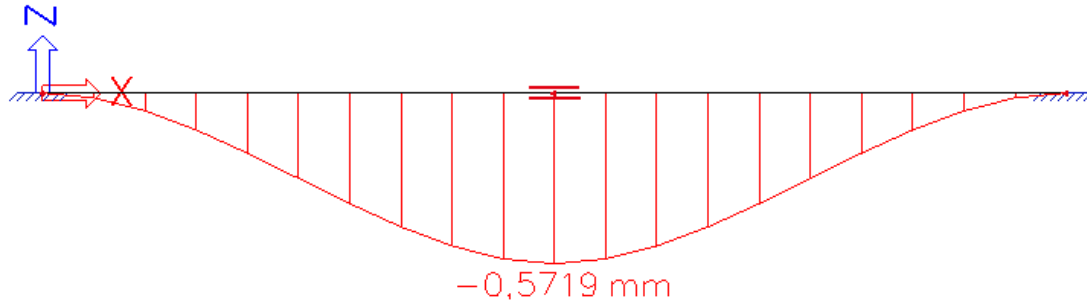


Tím získáme následující výsledky:

Vlastní frekvence

N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Kombinace hmot : CM1				
1	21,43	134,66	18132,59	0,05

Deformace pro harmonické zatížení jsou:



Deformace na prutu

Lineární výpočet, Extrém : Globální, Systém : LSS

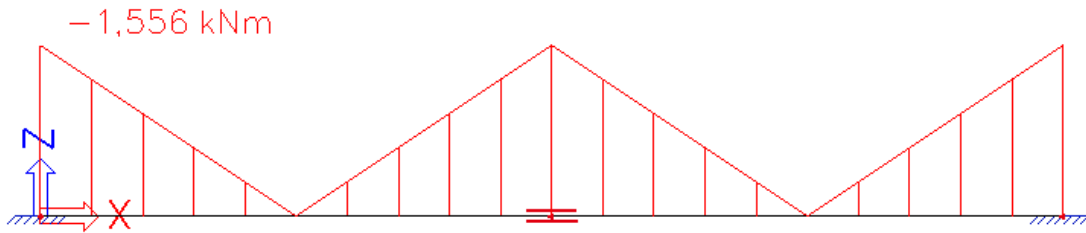
Výběr : Vše

Zatěžovací stavy : LC2

Stav	Prvek	dx [m]	ux [mm]	uz [mm]	fy [mrad]
LC2	B1	0,000	0,0000	0,0000	0,0
LC2	B1	3,000	0,0000	-0,5719	0,0
LC2	B1	1,500	0,0000	-0,2860	-0,3

Musíme však mít na zřeteli, že se jedná o kmitání: o půl periody později se deformace projeví na horní straně nosníku a ne na spodní.

Tato skutečnost je zřejmá při pohledu na průběh momentů pro harmonické zatížení:



Vnitřní síly na prutu

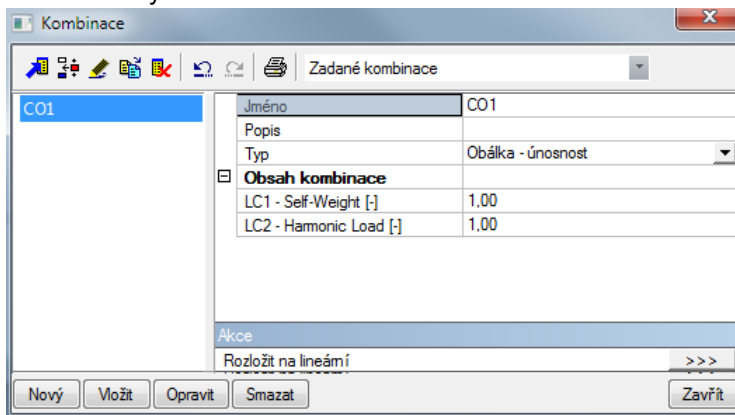
Lineární výpočet, Extrém : Globální, Systém : LSS
 Výběr : Vše
 Zatěžovací stavy : LC2

Prvek	Stav	dx [m]	N [kN]	Vz [kN]	My [kNm]
B1	LC2	0,000	0,000	-1,037	-1,556
B1	LC2	2,700	0,000	-1,037	-1,245
B1	LC2	2,400	0,000	-1,037	-0,933
B1	LC2	1,500	0,000	-1,037	0,000

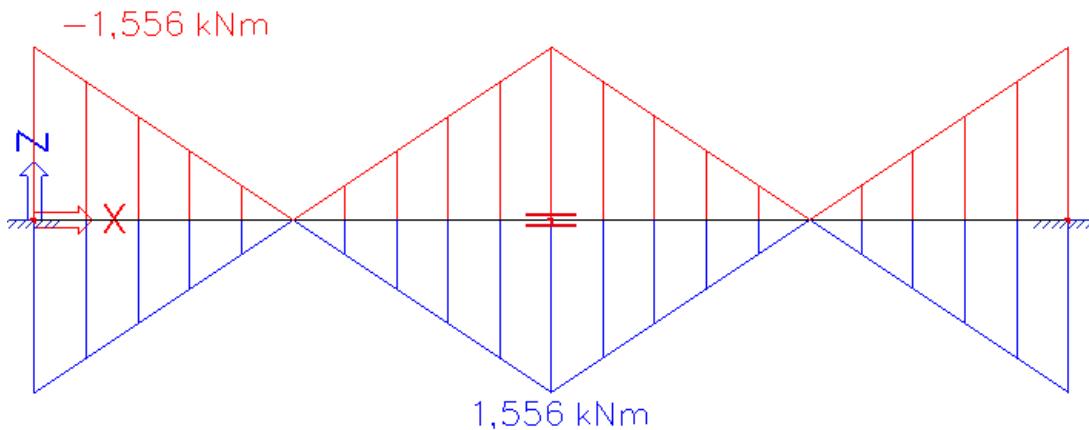
Pro statické zatížení bychom očekávali převrácený momentový diagram. Při dynamických výpočtech však musíme vždy počítat s oběma směry, protože zatížení kmitá v obou směrech.

V Scia Engineer se toto zohlední snadno vytvořením normové kombinace nebo obalové křivky. V těchto kombinacích se dynamické zatížení uvažuje jak s kladným, tak záporným součinitelem kombinace a tak dojde k zohlednění obou stran amplitudy kmitání.

V našem příkladu vytvoříme kombinaci typu **Obálka – únosnost**, která obsahuje vlastní tíhu a harmonický zatěžovací stav.



Průběh momentů pro tuto kombinaci vypadá následovně:



Účinek kmitání je správně zohledněn: vidíme obě stany kmitání. Vidíme to rovněž u **Klíče kombinace** v **Dokumentu**, kde jsou vypsány dvě lineární kombinace generované z obálkové kombinace (lokální extrémy):

1. Klíč kombinace

Jméno	Popis kombinací
1	LC1*1.00 +LC2*-1.00
2	LC1*1.00 +LC2*1.00

Ruční výpočet

Abychom porovnali výsledky získané ve Scia Engineer, provedeme ruční výpočet. Nejprve s pomocí rovnice (2.3) zkontrolujeme vlastní frekvenci. Pomocí standardních inženýrských tabulek [11] stanovíme maximální deformaci oboustranně vetknutého nosníku délky L zatíženého silou F uprostřed rozpětí:

$$\delta_{\max} = \frac{FL^3}{192EI} \quad (3.12)$$

Kde:

$$\begin{aligned} F &= 1,962 \text{ kN} = 1962 \text{ N} \\ L &= 6\text{m} = 6000 \text{ mm} \\ E &= 210000 \text{ N/mm}^2 \\ I &= 19430000 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\delta_{\max} = \frac{1962 \text{ N} \cdot (6000 \text{ mm})^3}{192 \cdot 210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 19430000 \text{ mm}^4} = 0,54095 \text{ mm}$$

Pak můžeme vypočítat tuhost systému k:

$$k = \frac{F}{\delta_{\max}} = \frac{1962 \text{ N}}{0,54095 \text{ mm}} = 3626,93 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 3626933,33 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Aplikujeme rovnici (2.3):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3626933,33 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{200 \text{ kg}}} = 134,67 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \mathbf{21,43 \text{ Hz}}$$

Tento výsledek přesně odpovídá výsledku vypočtenému programem. Nyní známe vlastní frekvenci a můžeme ověřit výsledky harmonického zatížení.

Budící frekvence harmonického zatížení je **5 Hz**, což odpovídá kruhové frekvenci **31,416 rad/s**.

Pomocí rovnice (3.8) vypočteme frekvenční poměr:

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{31,416 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{134,67 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = \mathbf{0,233289}$$

Frekvenční poměr je možné použít v rovnici (3.9) k výpočtu součinitele dynamického zvětšení:

$$\frac{Y}{Y_s} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0,233289^2)^2 + (2 \cdot 0,233289 \cdot 0,05)^2}} = 1,0572$$

Tento výsledek naznačuje, že výsledky statického výpočtu je nutno vynásobit součinitelem **1,0572**, abychom získali výsledky dynamické.

Statická deformace byla vypočtena jako $\delta_{\max} = 0,54095\text{mm}$.

$$\Rightarrow \text{Dynamická deformace} = 1,0572 \times 0,54095 \text{ mm} = \mathbf{0,5719 \text{ mm}}$$

Tento výsledek přesně odpovídá hodnotě vypočtené programem.

Stejným způsobem lze spočítat moment v polovině rozpětí nosníku.

Použijeme standardní inženýrské tabulky [11] a najdeme, že maximální statický moment v polovině oboustranně vetknutého nosníku o rozpětí L zatíženého silou F v polovině rozpětí vyjde:

$$M = \frac{FL}{8} = \frac{1,962\text{kN} \cdot 6\text{m}}{8} = 1,4715\text{kNm}$$

$$\Rightarrow \text{Dynamický moment} = 1,0572 \times 1,4715 \text{ kNm} = \mathbf{1,556 \text{ kNm}}$$

Tento výsledek přesně odpovídá hodnotě vypočtené programem.

Rezonance

Jak bylo uvedeno v teoretické části, k rezonanci dochází v případě, že frekvenční poměr r má hodnotu blízkou jedničce. V takovém případě dostáváme vysoké hodnoty součinitele dynamického zvětšení. Tuto skutečnost si můžeme demonstrovat na příkladu opakovaného výpočtu součinitele dynamického zvětšení pro různé frekvence a různá procenta tlumení. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce:

Frequency Ratio	Forcing Frequency [Hz]	Mag. factor Damping 5%	Mag. factor Damping 8%	Mag. factor Damping 10%	Mag. factor Damping 15%	Mag. factor Damping 25%	Mag. factor Damping 50%
0,0	0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	4,29	1,0414	1,0411	1,0408	1,0396	1,0361	1,0198
0,4	8,57	1,1891	1,1870	1,1851	1,1785	1,1581	1,0748
0,6	12,86	1,5557	1,5452	1,5357	1,5041	1,4148	1,1399
0,8	17,15	2,7116	2,6173	2,5384	2,3113	1,8582	1,1399
1,0	21,43	10,0000	6,2500	5,0000	3,3333	2,0000	1,0000
1,2	25,72	2,1926	2,0830	1,9952	1,7590	1,3440	0,7824
1,4	30,01	1,0308	1,0144	1,0000	0,9543	0,8417	0,5891
1,6	34,29	0,6377	0,6326	0,6280	0,6127	0,5704	0,4475
1,8	38,58	0,4450	0,4428	0,4408	0,4340	0,4142	0,3480
2,0	42,87	0,3326	0,3315	0,3304	0,3269	0,3162	0,2774
2,2	47,15	0,2600	0,2593	0,2587	0,2567	0,2503	0,2260
2,4	51,44	0,2098	0,2094	0,2090	0,2077	0,2037	0,1876
2,6	55,73	0,1734	0,1732	0,1729	0,1720	0,1694	0,1582
2,8	60,01	0,1461	0,1459	0,1457	0,1451	0,1432	0,1353
3,0	64,30	0,1249	0,1248	0,1246	0,1242	0,1229	0,1170
3,2	68,59	0,1082	0,1081	0,1080	0,1076	0,1066	0,1023
3,4	72,87	0,0946	0,0946	0,0945	0,0943	0,0935	0,0901
3,6	77,16	0,0836	0,0835	0,0835	0,0833	0,0827	0,0801
3,8	81,45	0,0744	0,0743	0,0743	0,0741	0,0737	0,0716
4,0	85,73	0,0666	0,0666	0,0666	0,0665	0,0661	0,0644
4,2	90,02	0,0601	0,0600	0,0600	0,0599	0,0596	0,0583
4,4	94,31	0,0545	0,0544	0,0544	0,0543	0,0541	0,0530
4,6	98,59	0,0496	0,0496	0,0496	0,0495	0,0493	0,0484
4,8	102,88	0,0454	0,0453	0,0453	0,0453	0,0451	0,0443
5,0	107,17	0,0417	0,0416	0,0416	0,0416	0,0414	0,0408

Legenda:

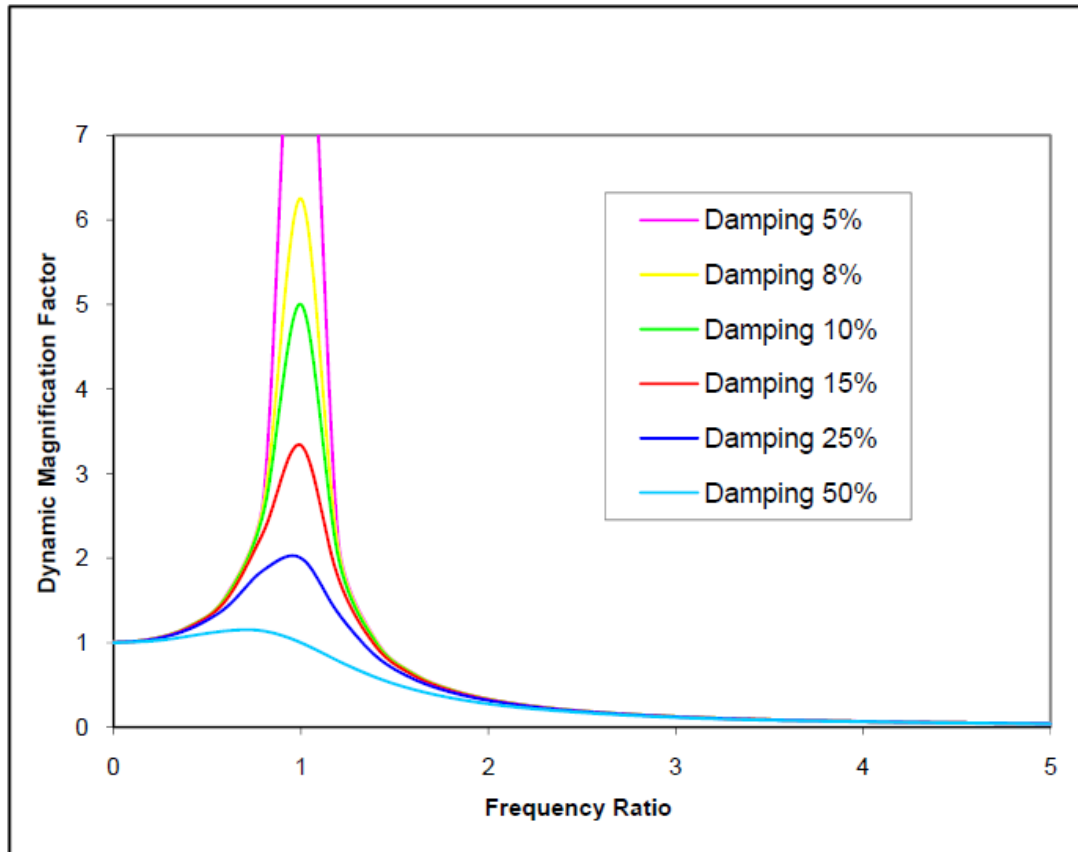
Frequency ratio = frekvenční poměr

Forcing frequency = budící frekvence

Mag. factor = součinitel zvětšení

Damping = tlumení

Abychom mohli vyvodit správný závěr, vykreslíme numerické výsledky graficky:



Legenda:

Dynamic magnification factor = součinitel dynamického zvětšení

Frequency ratio = frekvenční poměr

Damping = tlumení

Jako první věci si všimneme zřetelně viditelného rezonančního jevu. Pokud je frekvenční poměr rovný jedné, stává se součinitel dynamického zvětšení velmi velký, což naznačuje, že harmonické zatížení může vyvodit velké výchylky vibrací.

Za druhé vidíme, že vliv koeficientu tlumení na odezvu systému je významný. Při koeficientu tlumení **5 %** je součinitel zvětšení přibližně **10** a při koeficientu tlumení **50 %** je součinitel zvětšení redukován na hodnotu 1.

Obecně můžeme říci, že z grafu lze vyvodit následující závěry [1]:

Odezva systému při nízkých frekvencích je **závislá na tuhosti**. V oblasti rezonance je odezva **závislá na tlumení** a při vysokých frekvencích je odezva určena hmotou: je **závislá na hmotě**.

Toto je nutno mít na zřeteli při pokusu o snížení vibrací konstrukce. Například, zesílení tlumení bude mít pouze nepatrný vliv v případě, že budicí frekvence a frekvence odezvy jsou v oblasti daleko od rezonance, tedy v oblasti ovlivňované hmotou konstrukce.

**Poznámka**

V programu Scia Engineer je logaritmický dekrement útlumu omezen na interval 0,0001 až 10.

Spodní limit odpovídá koeficientu tlumení $\approx 0,0016\%$. Nulové tlumení není možné, protože by to vedlo k nekonečné odezvě (dělení nulou) při rezonanci.

Horní limit odpovídá koeficientu tlumení $\approx 85\%$. U vibrační konstrukci se jedná o extrémní hodnotu, která nebude téměř v žádném případě dosažena. Tlumení bude podrobněji probráno v kapitole 5.

Dalším případem aplikování harmonického zatížení je konstrukce zatížená pístovým systémem nebo motorem. Jak reciproční efekt pístu, tak rotační nevyváženost motoru vedou k budící síle inertního typu působící na systém.

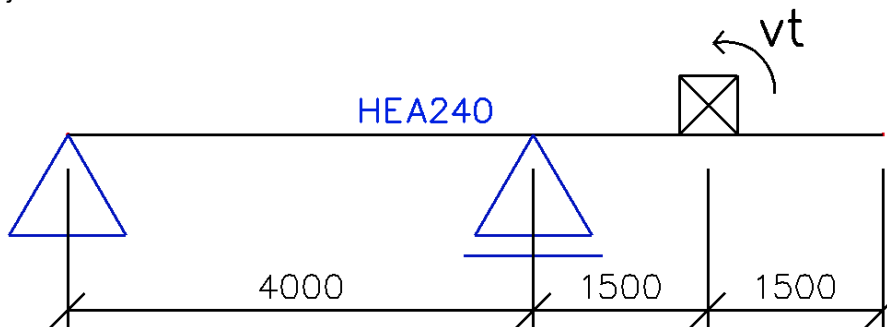
Pro nevyvážené těleso hmotnosti m_r , při efektivním poloměru e , rotujícím úhlovou rychlostí v , můžeme budící sílu F zapsat jako [1]:

$$F = m_r \cdot e \cdot v^2 \quad (3.13)$$

Toto je prakticky ilustrováno na následujícím příkladu.

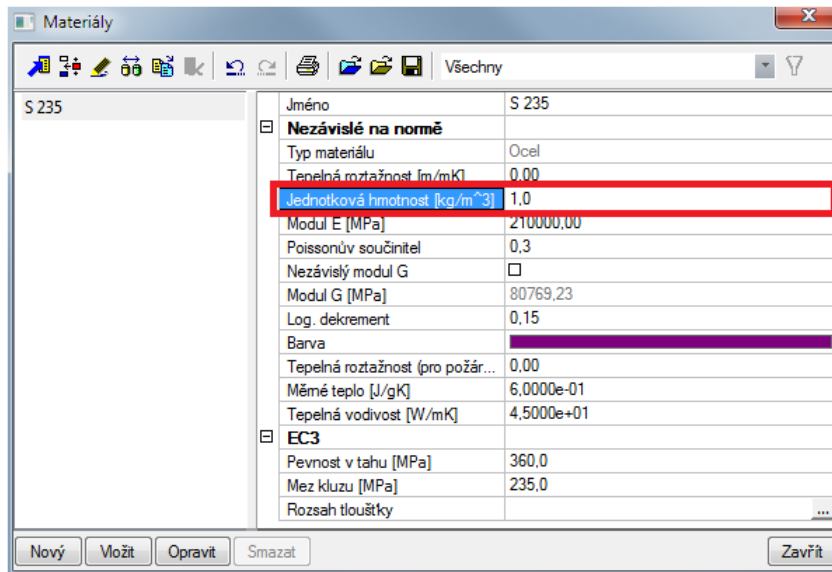
Příklad 6: Forced_Vibration_2.esa

Elektrický motor o hmotnosti **500 kg** je namontován na prostém nosníku s jednostrannou konzolou. Nosník má průřez **HEA 240** a je vyroben z materiálu **S235** podle **EC-EN**. Rozpětí nosníku je **4 m** a délka konzoly je **3 m**. Nevyváženost motoru je **0,6 kgm**. Koeficient tlumení systému je uvažován hodnotou **10 %**.



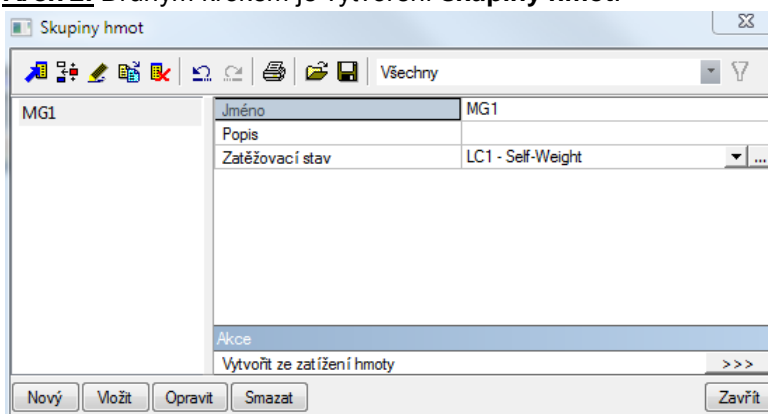
Motor může pracovat při rychlostech **800, 1000 a 1200 ot./min**. Pro každou z těchto rychlostí je nutno spočítat amplitudu vynuceného kmitání, aby se mohlo například zkontrolovat, jestli jsou vibrace způsobené motorem přijatelné.

Vytvoříme jeden statický zatěžovací stav: **vlastní tíha** nosníku. Abychom však při dynamickém výpočtu zanedbali vlastní tíhu, můžeme v knihovně materiálů nastavit objemovou hmotnost (**Jednotková hmotnost**) pro **S235** na **1 kg/m³**. Díky tomu bude jednodušší následná ruční kontrola výpočtu. Do středu konzoly je nutno přidat uzel, aby zde mohla být zadána poloha motoru.

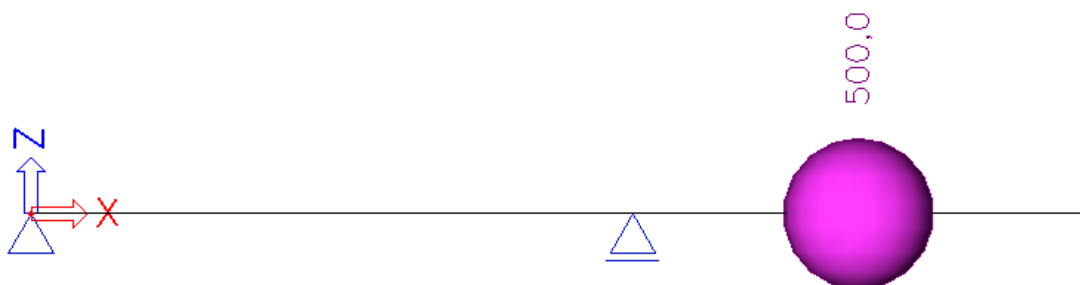


Krok 1: Prvním krokem v dynamickém výpočtu je aktivace funkcionality **Dynamika** na záložce **Funkcionalita** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**.

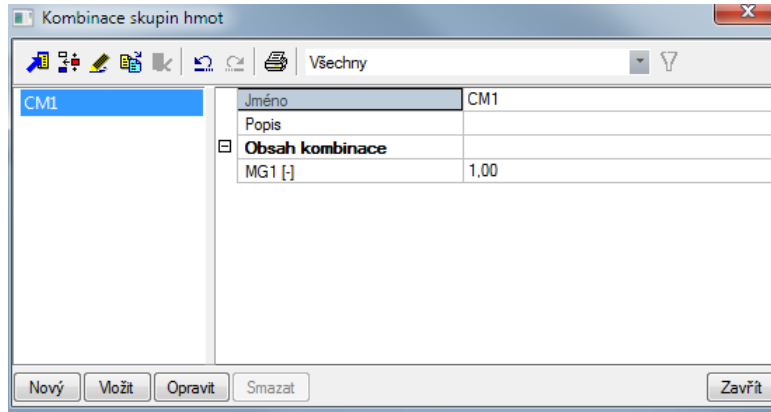
Krok 2: Druhým krokem je vytvoření **skupiny hmot**.



Krok 3: Po zadání skupiny hmot lze zadat hmotu motoru **500 kg** doprostřed délky konzoly.



Krok 4: V dalším kroku přidáme skupinu hmot do **kombinace skupin hmot**, kterou lze využít pro definici harmonických zatížení při různých rychlostech.



Krok 5: Po vytvoření kombinace hmot můžeme definovat tři **harmonické** zatěžovací stavy, pro každou rychlost jeden.

Každý zatěžovací stav použije stejnou kombinaci hmot a má stejné parametry tlumení.

Koeficient tlumení je uvažován hodnotou **10 %**. Pomocí rovnice (3.11) vypočteme **logaritmický dekrement**:

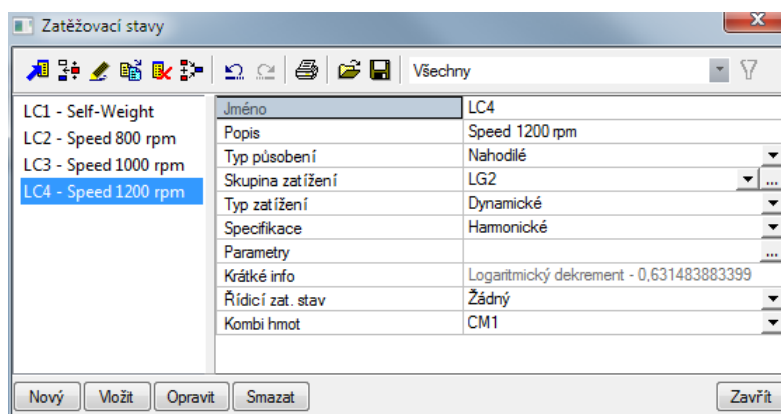
$$\Lambda = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,10}{\sqrt{1-(0,10)^2}} = 0,631483883399$$

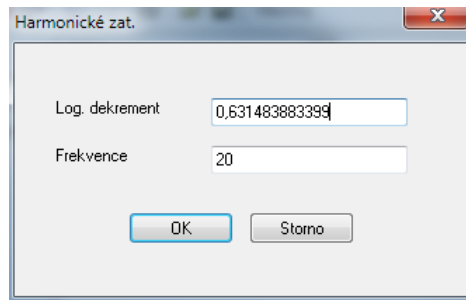
Budící frekvence se liší pro každý zatěžovací stav a můžeme ji vypočítat ze zadaných rychlostí:

$$v_{800} = 800 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 83,78 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow f_{800} = 13,33 \text{ Hz}$$

$$v_{1000} = 1000 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 104,72 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow f_{1000} = 16,67 \text{ Hz}$$

$$v_{1200} = 1200 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 125,66 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow f_{1200} = 20,00 \text{ Hz}$$





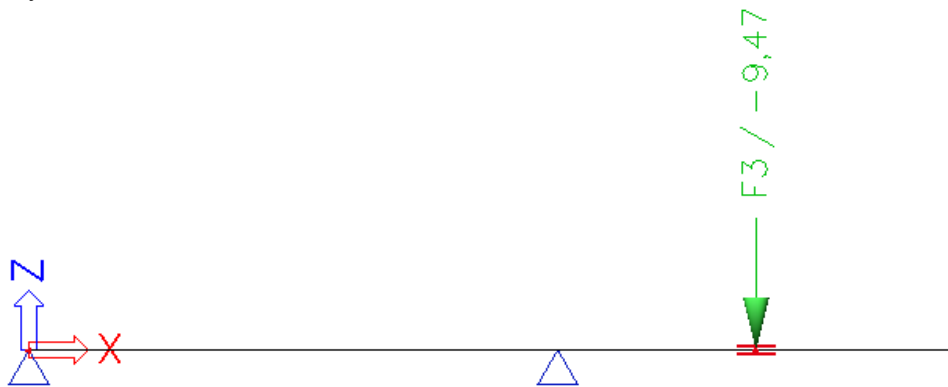
Krok 6: Parametry harmonického zatížení byly definovány. Zbývá zadat amplitudu tří budících sil. Použijeme rovnici (3.13) a vypočteme tyto síly z budící kruhové frekvence a nevyvážené hmoty.

$$F_{800} = m_r \cdot e \cdot v_{800}^2 = 0,6 \text{kgm} \cdot \left(83,78 \text{rad/s}\right)^2 = 4211,03 \text{N} = 4,21 \text{kN}$$

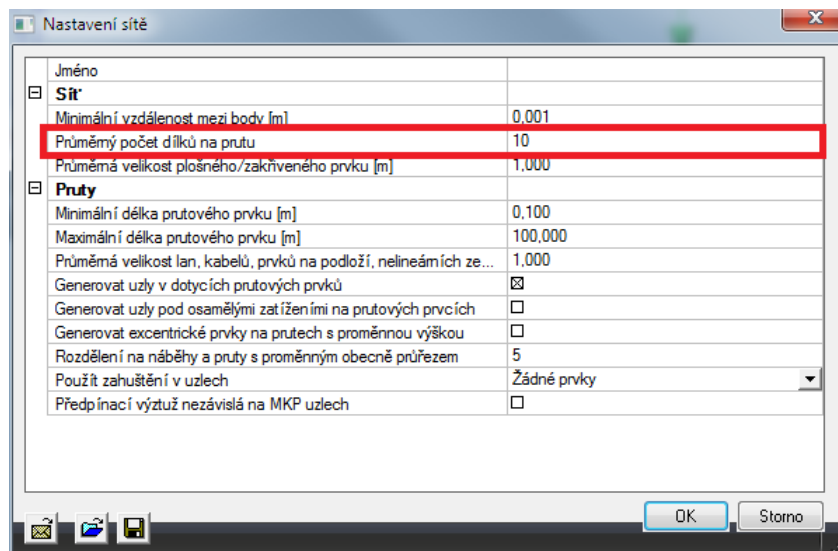
$$F_{1000} = m_r \cdot e \cdot v_{1000}^2 = 0,6 \text{kgm} \cdot \left(104,72 \text{rad/s}\right)^2 = 6579,74 \text{N} = 6,58 \text{kN}$$

$$F_{1200} = m_r \cdot e \cdot v_{1200}^2 = 0,6 \text{kgm} \cdot \left(125,66 \text{rad/s}\right)^2 = 9474,82 \text{N} = 9,47 \text{kN}$$

Síly zadáme funkcí **Zatížení > Bodová síla > V uzlu**.

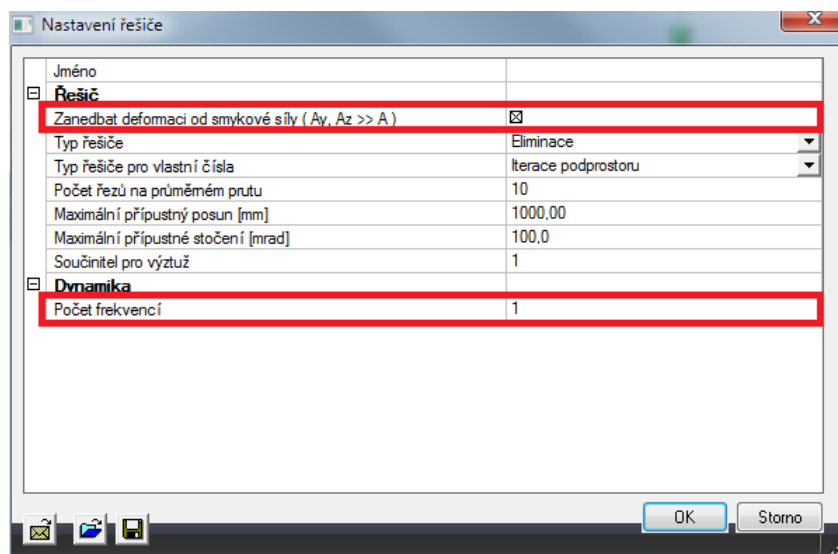


Krok 7: Pro získání přesných dynamických výpočtů zjelníme síť konečných prvků. To provedeme v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení sítě**.



Krok 8: Posledním krokem před spuštěním výpočtu je nastavení počtu počítaných vlastních tvarů. Pro náš příklad potřebujeme pouze jeden vlastní tvar a proto v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení řešiče** zadáme počet frekvencí roven 1.

Pro lepší porovnání výsledků s ručním výpočtem zanedbáme deformaci od smykové síly.



Krok 9: Tím jsme provedli všechny kroky a můžeme spustit **Lineární výpočet** funkcí **Výpočet, síť > Výpočet**.

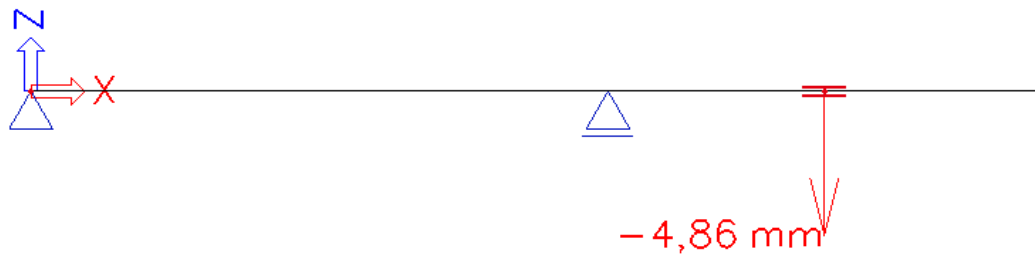
Tím dostaneme následující výsledky:

Vlastní frekvence

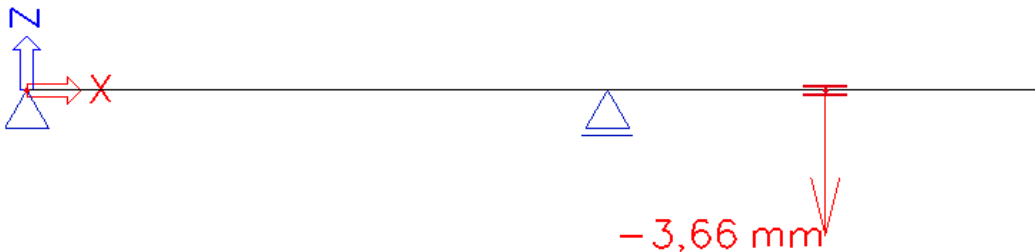
N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Kombinace hmot : CM1				
1	14,15	88,88	7899,98	0,07

Uzlové deformace pro harmonická zatížení v místě motoru jsou následující:

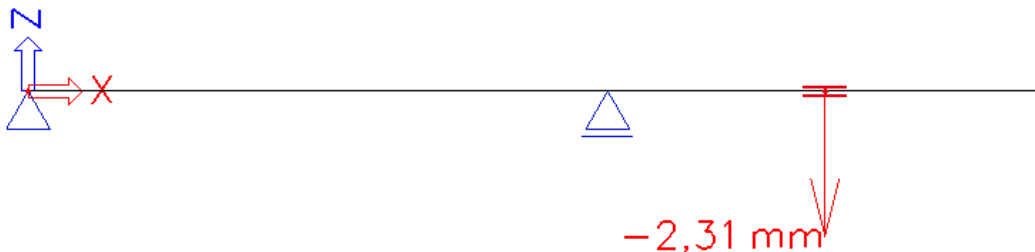
Při 800 ot./min:



Při 1000 ot./min:



Při 1200 ot./min:

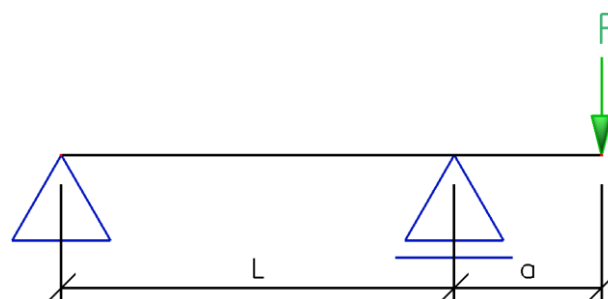


Jak již bylo uvedeno u předchozího příkladu, je nutno mít na paměti, že znaménka nejsou podstatná, protože kmitání probíhá z rovnovážné polohy na obě strany.

Ruční výpočet

Pro kontrolu výsledků spočtených programem provedeme ruční výpočet [15]. Nejprve zkontrolujeme vlastní frekvenci pomocí rovnice (2.3). Použijeme inženýrské tabulky [11], kde najdeme maximální statickou deformaci prostého nosníku délky L s konzolou délky a zatíženého silou F na konci konzoly:

$$\delta_{\max} = \frac{Fa^2(L+a)}{3EI} \quad (3.14)$$



Pak můžeme vypočítat tuhost systému k :

$$k = \frac{F}{\delta_{\max}} = \frac{3EI}{a^2(L+a)}$$

Kde: $L = 4\text{m} = 4\,000\text{ mm}$
 $a = 1,5\text{m} = 1\,500\text{ mm}$
 $E = 210\,000\text{ N/mm}^2$
 $I = 77\,600\,000\text{ mm}^4$

$$k = \frac{3 \cdot 210000\text{ N/mm}^2 \cdot 77600000\text{ mm}^4}{(1500\text{ mm})^2 \cdot (4000\text{ mm} + 1500\text{ mm})} = 3950,55\text{ N/mm} = 3950545,45\text{ N/m}$$

Aplikujeme rovnici (2.3):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3950545,45\text{ N/m}}{500\text{ kg}}} = 88,89\text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 14,15\text{ Hz}$$

Tento výsledek přesně odpovídá hodnotě vypočtené programem.

Pomocí rovnice (3.8) vypočteme frekvenční poměr pro každou rychlost motoru:

$$r_{800} = \frac{v_{800}}{\omega} = \frac{83,78\text{ rad/s}}{88,89\text{ rad/s}} = 0,9425$$

$$r_{1000} = \frac{v_{1000}}{\omega} = \frac{104,72\text{ rad/s}}{88,89\text{ rad/s}} = 1,1781$$

$$r_{1200} = \frac{v_{1200}}{\omega} = \frac{125,66\text{ rad/s}}{88,89\text{ rad/s}} = 1,4137$$

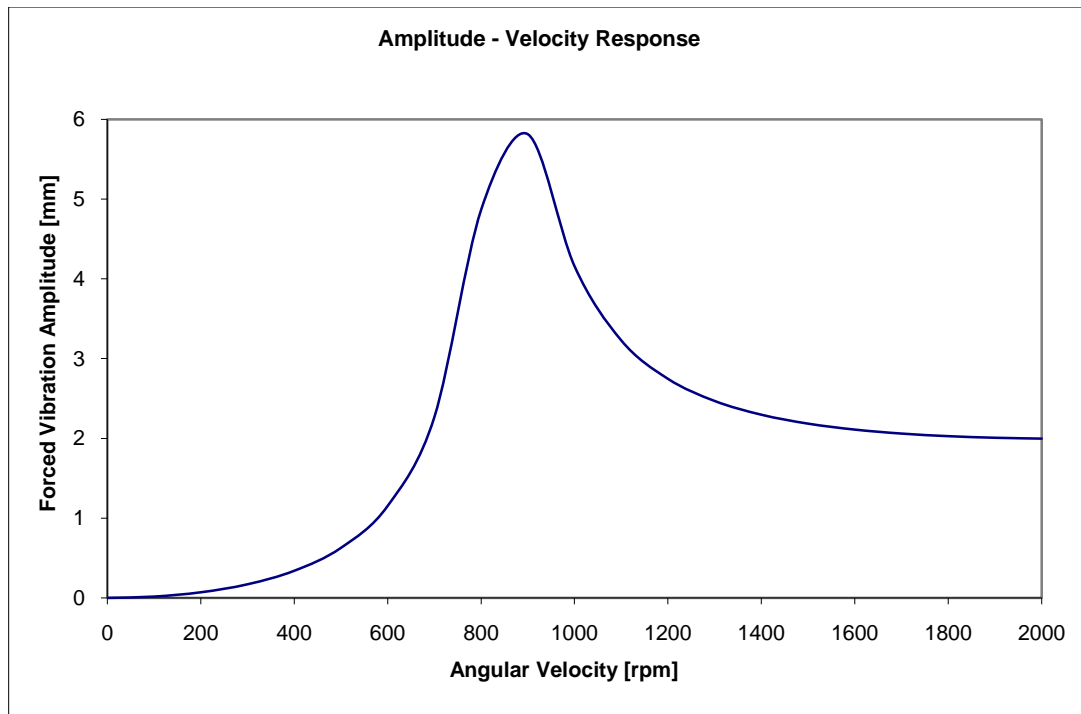
Frekvenční poměry je možné použít v rovnici (3.9) k výpočtu součinitelů dynamického zvětšení: Pokud použijeme také rovnici (3.4), můžeme vypočítat dynamickou amplitudu pro každou rychlost:

$$Y_{800} = \frac{F_{800}/k}{\sqrt{(1-r_{800}^2)^2 + (2r_{800}\xi)^2}} = \frac{4211,03\text{ N}/3950545,45\text{ N/m}}{\sqrt{(1-0,9425^2)^2 + (2 \cdot 0,9425 \cdot 0,10)^2}} = 4,86\text{ mm}$$

$$Y_{1000} = \frac{F_{1000}/k}{\sqrt{(1-r_{1000}^2)^2 + (2r_{1000}\xi)^2}} = \frac{6579,74\text{ N}/3950545,45\text{ N/m}}{\sqrt{(1-1,1781^2)^2 + (2 \cdot 1,1781 \cdot 0,10)^2}} = 3,67\text{ mm}$$

$$Y_{1200} = \frac{F_{1200}/k}{\sqrt{(1-r_{1200}^2)^2 + (2r_{1200}\xi)^2}} = \frac{9474,82\text{ N}/3950545,45\text{ N/m}}{\sqrt{(1-1,4137^2)^2 + (2 \cdot 1,4137 \cdot 0,10)^2}} = 2,31\text{ mm}$$

Tyto výsledky přesně odpovídají hodnotám vypočteným programem. Stejně jako v minulém příkladu může být výpočet opakován pro několik úhlových rychlostí. Výsledek je vykreslen na následujícím obrázku:



Legenda:

Amplitude-Velocity Response = graf závislosti amplitudy na rychlosti

Forced Vibration Amplitude = amplituda vynuceného kmitání

Angular Velocity = úhlová rychlost

Nejdůležitějším faktem k povšimnutí je pokles amplitudy kmitání při zvýšení budicí frekvence, který je způsoben posunem směrem od rezonance. [15]

4. Spektrální analýza: Seizmické zatížení

V této kapitole je podrobně vysvětlen seizmický výpočet v programu Scia Engineer. Během zemětřesení se hýbe podloží, které podpírá konstrukci. Konstrukce se snaží tento pohyb následovat a výsledkem je pohyb hmoty v konstrukci. Následně pak tyto hmoty působí na konstrukci setrvačnými silami. Pokud tyto síly určíme, můžeme jimi zatížit konstrukci a dynamický výpočet se (podobně jako u harmonického zatížení) transformuje na ekvivalentní statický výpočet.

V první části této kapitoly vysvětlíme teorii. Ta pak bude ilustrována na příkladech, které budou opět ověřeny ručním výpočtem.

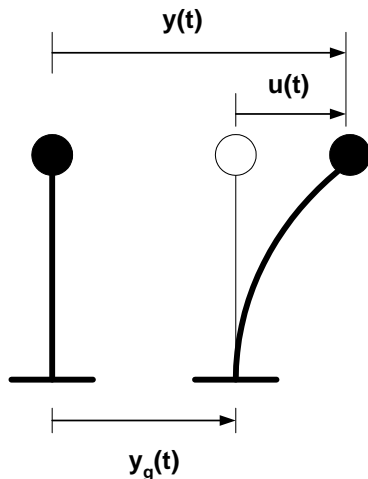
4.1 Teorie

Obecné

Podobně jako v předchozích kapitolách se před dynamickou analýzou složité konstrukce zaměříme podrobně na seizmickou analýzu systému s jedním stupněm volnosti. Úplný přehled lze najít v [2], [3].

Tento odstavec se zabývá analýzou konstrukcí, které jsou vystaveny harmonickému pohybu podloží. Nejdůležitějším harmonickým pohybem země je zemětřesení (seizmické zatížení), ale stejná výpočetní metoda může být použita i pro analýzu podzemních nebo povrchových explozí a vibrací generovaných těžkou dopravou nebo stroji.

Následující obrázek ilustruje přemístění systému, který je vystaven pohybu země:



Kde: $y_g(t)$: je přemístění země,
 $y(t)$: je celkové přemístění hmoty,
 $u(t)$: je relativní přemístění hmoty.

Celkové přemístění tak můžeme vyjádřit jako:

$$y(t) = y_g(t) + u(t) \quad (4.1)$$

Protože se předpokládá, že y_g je harmonické, lze napsat:

$$y_g(t) = Y_g \cdot \sin(\nu \cdot t) \quad (4.2)$$

Pohybovou rovnici rovnováhy lze zapsat ve tvaru:

$$m \cdot \ddot{y}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0 \quad (4.3)$$

Setrvačná síla je vztažena k celkovému přemístění hmoty (y) a tlumení a reakce pružiny jsou vztaženy k relativnímu přemístění hmoty (u)

Pokud dosadíme (4.1) do (4.3), dostaneme:

$$m \cdot (\ddot{u}(t) + \ddot{y}_g(t)) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0; \text{ nebo}$$

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot \ddot{y}_g(t) \quad (4.4)$$

Tato rovnice je známa jako **Obecná seizmická pohybová rovnice**. Tuto rovnici lze použít k ilustraci chování konstrukcí, které jsou zatíženy seizmickým zatížením:

Dosazením (4.2) do (4.4) dostaneme:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot Y_g \cdot v^2 \cdot \sin(v \cdot t)$$

Tuto rovnici lze porovnat s rovnicí (3.2) z předchozí kapitoly. Závěrem tedy platí, že pohyb země lze nahradit vnější harmonickou silou s amplitudou:

$$F = -m \cdot Y_g \cdot v^2$$

Spektra odezvy

Pokud má být konstrukce navržena na zemětřesení, nejčastěji se použije spektrální analýza, protože zatížení zemětřesením je často popsáno jako spektrum odezvy. Spektrum odezvy může být spektrum přemístění, rychlosti nebo zrychlení.

Vztah mezi zemětřesením (definovaným historií zrychlení) a odpovídajícím spektrem odezvy je popsán v [16]:

$$S_d(\xi, \omega) = \frac{1}{\omega} \cdot \left[\int y_g(\tau) \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot (T-\tau)} \cdot \sin(\omega(T-\tau)) \cdot d\tau \right]_{\max} \quad (4.5)$$

Kde: $\ddot{y}_g(\tau)$: Zrychlení podloží (země) jako funkce času

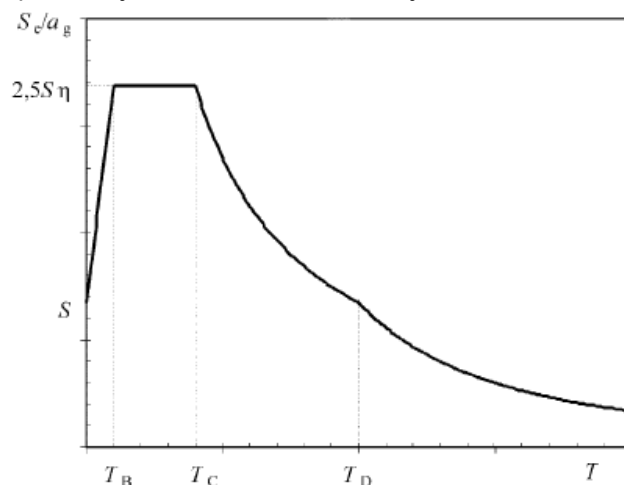
ξ : Součinitel tlumení

T : Perioda $2\pi/\omega$

Namísto spektra odezvy pro přemístění S_d je možno použít spektrum odezvy pro rychlost S_v nebo zrychlení S_a . Tato tři spektra jsou ve vzájemném vztahu přes ω :

$$S_a = \omega \cdot S_v = \omega^2 \cdot S_d \quad (4.6)$$

V Eurocode 8 [7] je pohyb při zemětřesení v daném bodě na povrchu reprezentován spektrem odezvy pro zrychlení pružného podloží neboli „pružným spektrem odezvy S_e “. Toto spektrum je zobrazeno na následujícím obrázku:



Velikost zemětřesení se běžně popisuje tzv. Richtervou stupnicí. **Příloha A** obsahuje vztah mezi velikostí na Richtervě stupnici a maximálním zrychlením podloží.

Spektrální analýza

Pro systémy s více stupni volnosti lze rovnici (4.4) zapsat v maticovém zápisu jako soustavu vázaných diferenciálních rovnic:

$$M \cdot \ddot{U} + C \cdot \dot{U} + K \cdot U = -M \cdot \{1\} \cdot \ddot{Y}_g \quad (4.7)$$

Matice $\{1\}$ se používá pro naznačení směru zemětřesení. Například pro dvourozměrnou konstrukci (tři stupně volnosti) a zemětřesení působící ve směru osy x vypadá matice takto $\{1,0,0,1,0,0,1,0,0,\dots\}$.

Výsledná soustava vázaných diferenciálních rovnic je redukována na soustavu nevázaných diferenciálních rovnic prostřednictvím transformace $U = Z \cdot Q$, kde Z je podmnožinou Φ (vlastní vektory) a Q je vektor, který je časově závislý.

$$M \cdot Z \cdot \ddot{Q} + C \cdot Z \cdot \dot{Q} + K \cdot Z \cdot Q = -M \cdot \{1\} \cdot \ddot{Y}_g;$$

nebo

$$Z^T \cdot M \cdot Z \cdot \ddot{Q} + Z^T \cdot C \cdot Z \cdot \dot{Q} + Z^T \cdot K \cdot Z \cdot Q = -Z^T \cdot M \cdot \{1\} \cdot \ddot{Y}_g$$

Toto můžeme zjednodušit na soustavu nevázaných diferenciálních rovnic:

$$\ddot{Q} + C^* \cdot \dot{Q} + \Omega^2 \cdot Q = -Z^T \cdot M \cdot \{1\} \cdot \ddot{Y}_g \quad (4.8)$$

Kde C^* je diagonální matice obsahující členy jako $2\omega_i \xi_i$.

Každá rovnice j má řešení ve tvaru:

$$Q_j = -Z^T \cdot M \cdot \{1\} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \int_0^t Y_g(\tau) \cdot e^{-\xi \omega_j (T-\tau)} \cdot \sin(\omega_j (T-\tau)) \cdot d\tau \quad (4.9)$$

Abychom získali maximální přemístění, nahradíme spektrum odezvy pro přemístění S_d z rovnice (4.5):

$$Q_{j,\max} = -Z^T \cdot M \cdot \{1\} \cdot S_d(\xi_j, \omega_j) \quad (4.10)$$

A:

$$U_{j,\max} = -Z \cdot Z^T \cdot M \cdot \{1\} \cdot S_d(\xi_j, \omega_j); \text{ nebo}$$

$$U_{j,\max} = -Z \cdot \Psi \cdot S_d(\xi_j, \omega_j) \quad (4.11)$$

Kde $\Psi = Z^T \cdot M \cdot \{1\}$ je známo jako modální participační součinitel.

4.2 Seizmické zatížení v Scia Engineer

Spektra odezvy

V programu Scia Engineer lze seizmické zatížení zadat po vytvoření kombinace skupin hmot. To znamená, že stále platí kroky aplikované v případě výpočtu vlastních frekvencí. Jsou však rozšířeny o vlastnosti seizmického zatížení.

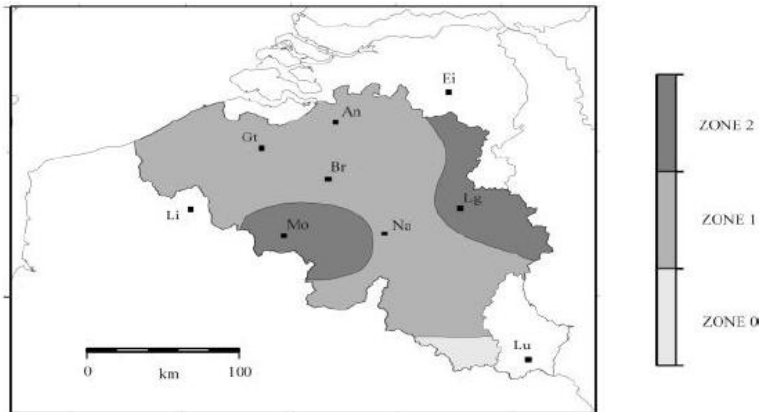
Jak bylo uvedeno v teoretické části, Eurocode 8 [7] definuje pružné spektrum odezvy S_e . Pro účely návrhu se toto spektrum redukuje na **návrhové spektrum S_d** . Návrhové spektrum závisí na několika parametrech: **typu podloží, zrychlení podloží, součiniteli chování** a na **tlumení**.

Podrobný popis těchto parametrů naleznete v Eurocode 8 [7]. V následujícím textu je uvedeno stručné shrnutí potřebné pro pochopení vstupních hodnot programu Scia Engineer.

- **Typ podloží:** Typ podloží závisí na charakteristikách zeminy a určuje se písmeny A až E. Například typ A odpovídá skále nebo podobným útvarům. B odpovídá velmi

hutným pískům, štěrku nebo velmi tuhému jílu, C pak hutným či středně hutným pískům, štěrku nebo tuhému jílu, atd.

- **Zrychlení podloží:** Každá země je rozdělena na seizmické zóny. Z definice se předpokládá, že seizmické riziko uvnitř každé zóny je konstantní. Riziko je pak popsáno jediným parametrem: limitní hodnotou zrychlení podloží a_{gR} . Následující obrázek ukazuje rozložení seizmických zón na území Belgie [9]:



- Zrychlení podloží a_g se vypočte z hodnoty a_{gR} pomocí součinitele důležitosti. Ve většině případů se však místo hodnoty a_g použije parametr α . **Součinitel zrychlení** α je definován jako zrychlení podloží vydělené tíhovým zrychlením g :

$$\alpha = \frac{a_g}{g} \quad (4.12)$$

- **Součinitel chování:** Abychom se při návrhu vyhnuli nepružné analýze konstrukce, zohledňuje se kapacita konstrukce tlumit energii (především díky poddajnému chování jednotlivých elementů), a to provedením pružné analýzy založené na spektru odezvy redukovaném s ohledem na pružné spektrum. Tato redukce se provádí pomocí součinitele chování q .
- **Tlumení:** Návrhová spektra v Eurocode 8 jsou definována pro tlumení **5 %**. Pokud má konstrukce jiný koeficient tlumení, je nutno spektrum upravit prostřednictvím opravného součinitele tlumení η . Toto bude podrobněji probráno v kapitole 5.

V programu Scia Engineer bylo již několik spekter zadáno v databázi spekter odezvy:

```
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class A - q = 1
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class A - q = 1.5
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class A - q = 2
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class A - q = 4
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class A - q = 5.5
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class A - q = 6
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class B - q = 1
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class B - q = 1.5
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class B - q = 2
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class B - q = 4
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class B - q = 5.5
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class B - q = 6
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class C - q = 1
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class C - q = 1.5
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class C - q = 2
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class C - q = 4
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class C - q = 5.5
EC 8 - Sd(T)/alfa - Subsoil class C - q = 6
```

Legenda:

Subsoil class = třída podloží

Spektra jsou definována pomocí výše popsaných parametrů. Hodnota parametr α může být zadána při samotném zadání seizmického zatížení, které bude probráno později.

Protokol o výpočtu

V protokolu o výpočtu programu Scia Engineer nalezneme mezivýsledky, které byly spočteny při výpočtu globálních účinků spektrálního zatížení.

Tento odstavce popisuje rovnice, které byly použity pro určení těchto mezivýsledků.

Vlastní kruhová frekvence a vlastní tvar

Maticе hmotnosti	$[M]_D$
Vektor hmotnosti	$\{m\} = [M]_D \cdot \{1\}$
Vlastní kruhová frekvence vlastního tvaru j	$\omega_{(j)}$
Normovaný vlastní tvar	$\{\phi\}_{(j)}$, $\{\phi\}_{(j)}^T \cdot [M]_D \cdot \{\phi\}_{(j)} = M_{(j)} = 1$ kde
Celková hmota ve směru k	$M_{k,tot}$
Spektrum odezvy pro zrychlení	$S_{a,k,(j)}$
Směr	k
Celkový počet směrů	NK

Součinitel participace vlastního tvaru j ve směru k

Součinitel participace	$\gamma_{k,(j)} = \frac{\{\phi_k\}^T \cdot \{m\}}{M_{(j)}} = \{\phi_k\}^T \cdot \{m\}$
Efektivní hmota	$M_{k,ef,(j)} = \gamma_{k,(j)}^2 \cdot M_{(j)} = \gamma_{k,(j)}^2$
Participační procento hmoty	$L_{k,(j)} = \frac{M_{k,ef,(j)}}{M_{k,tot}}$

Součinitel tvaru pro vlastní tvar j

Součinitel tvaru ve směru k	$G_{k,(j)} = \frac{S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)}}{\omega_{(j)}^2}$
Celkový součinitel tvaru	$G_{(j)} = \frac{\sum_{k=1}^{NK} S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)}}{\omega_{(j)}^2}$

Odezva vlastního tvaru j

Přemístění	$\{u\}_{(j)} = G_{(j)} \cdot \{\phi\}_{(j)}$ $\{u_k\}_{(j)} = G_{k,(j)} \cdot \{\phi_k\}_{(j)}$
Zrychlení	$\{\ddot{u}\}_{(j)} = \omega_{(j)}^2 \cdot G_{(j)} \cdot \{\phi\}_{(j)}$ $\{\ddot{u}_k\}_{(j)} = \omega_{(j)}^2 \cdot G_{k,(j)} \cdot \{\phi_k\}_{(j)} = S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \{\phi_k\}_{(j)}$
Příčná síla v uzlu i pro směr k	$F_{i,k,(j)} = m_{i,k,(j)} \cdot S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$
Smyková síla ve směru	$F_{k,(j)} = \sum_i F_{i,k,(j)} = \{\ddot{u}_k\}_{(j)}^T \cdot \{m\} = S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \{\phi_k\}_{(j)}^T \cdot \{m\}$

k	$F_{k,(j)} = S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)}^2$
Moment převrácení v uzlu i pro směr k	$M_{i,k,(j)} = m_{i,k} \cdot S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)} \cdot z_i$
Moment převrácení ve směru k	$M_{k,(j)} = \sum_i M_{i,k,(j)} = \sum_i (m_{i,k} \cdot S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)} \cdot z_i)$ $M_{k,(j)} = S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \sum_i (m_{i,k} \cdot \phi_{i,k,(j)} \cdot z_i)$

Výpočet těchto parametrů bude ilustrován na příkladu uvedeném dále v této kapitole.

Metody kombinování modálních odezev

Metody kombinování modálních odezev se používají pro výpočet odezvy R při seizmické analýze. Termín „odezva“ se vztahuje k výsledkům získaným seizmickou analýzou, tj. přemístěním, zrychlením, vnitřním silám a napětím.

Protože diferenciální rovnice byly nevázané, výsledky obdržíme pro každý vlastní tvar j.

Pro získání celkové odezvy R_{tot} konstrukce se kombinují jednotlivé modální odezvy $R_{(j)}$.

V programu jsou použity následující metody kombinování odezev:

1. **Metoda SRSS** (Square Root of Sum of Squares - pravidlo druhé odmocniny součtu čtverců)

$$R_{tot} = \sqrt{\sum_{j=1}^N R_{(j)}^2},$$

Kde:

$R_{(j)}$: Odezva pro vlastní tvar j

2. **Metoda CQC** (Complete Quadratic Combination – úplná kvadratická kombinace)

$$R_{tot} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{(i)} \cdot \rho_{i,j} \cdot R_{(j)}},$$

Kde:

$R_{(i)}, R_{(j)}$: Odezva pro vlastní tvar i a j

$\rho_{i,j}$: Modální korelační koeficienty.

$$\rho_{i,j} = \frac{8\sqrt{\xi_i \xi_j} \cdot (\xi_i + r \xi_j) \cdot r^{\frac{3}{2}}}{(1-r^2)^2 + 4\xi_i \xi_j r(1+r^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_j^2)r^2}$$

$$r = \frac{\omega_j}{\omega_i}$$

ξ_i, ξ_j : Koeficient tlumení pro vlastní tvar i a j.

Tato metoda je založena jak na vlastní frekvenci, tak na vlastním tlumení. Metoda CQC proto vyžaduje zadání doplňujících parametrů: **spektra tlumení** pro definici koeficientů tlumení pro každý vlastní tvar.

V mnoha případech však neexistuje žádný postup, jak spočítat koeficienty tlumení pro vyšší vlastní tvary. Většinou se proto použije stejný koeficient pro všechny vlastní tvary [17].

3. Metoda MAX

$$R_{tot} = \sqrt{R_{(j_{MAX})}^2 + \sum_{j=1}^N R_{(j)}^2},$$

Kde:

$R_{(j)}$: Odezva pro vlastní tvar j

$R_{(j_{MAX})}$: Maximální odezva pro všechny vlastní tvary

Eurocode 8 [7] předepisuje **metodu SRSS**. Tuto metodu lze však aplikovat pouze v případě, kdy jsou všechny relevantní modální odezvy na sobě nezávislé. Tato podmínka je splněna, pokud je perioda vlastního tvaru j menší nebo rovna **90 %** periody vlastního tvaru i.

Pokud modální odezvy nejsou nezávislé, je třeba použít některou z přesnějších metod, např. **metodu CQC**.

Následující příklad ukazuje rozdíl mezi metodami SRSS a CQC.

Příklad 7: Spectral_Analysis_1.esa

Čtyřpatrová symetrická budova je modelována a analyzována jako prostorový objekt [18]. Konstrukce má následující vlastní frekvence pro prvních 5 vlastních tvarů:

Tvar 1: f = 13,87 Hz

Tvar 2: f = 13,93 Hz

Tvar 3: f = 43,99 Hz

Tvar 4: f = 44,19 Hz

Tvar 5: f = 54,42 Hz

Je vidět, že vlastní tvary 1 a 2 a vlastní tvary 3 a 4 jsou velmi blízké. Pro každý vlastní tvar lze pomocí rovnic z teoretické části vypočítat základní smykovou sílu pro jeden směr:

Tvar 1: f = -57,53 kN

Tvar 2: f = 52,30 kN

Tvar 3: f = -9,02 kN

Tvar 4: f = 8,12 kN

Tvar 5: f = 0,33 kN

Abychom získali celkovou odezvu, zkombinujeme modální odezvy pomocí metody **SRSS** a **CQC**.

Pro metodu **CQC** jsou použity následující modální vzájemné korelační koeficienty $\rho_{i,j}$ a koeficienty tlumení $\xi_{i,j}$ **5 %**.

Tvar	1	2	3	4	5
1	1,00	0,99	0,00	0,00	0,00
	0	8	6	6	4
2	0,99	1,00	0,00	0,00	0,00
	8	0	6	6	4
3	0,00	0,00	1,00	0,99	0,18
	6	6	0	8	0
4	0,00	0,00	0,99	1,00	0,18
	6	6	8	0	6
5	0,00	0,00	0,18	0,18	1,00
	4	4	0	6	0

Je důležité si všimnout relativně velikých mimodiagonálních členů, které naznačují, jaké vlastní tvary jsou zdvojené.

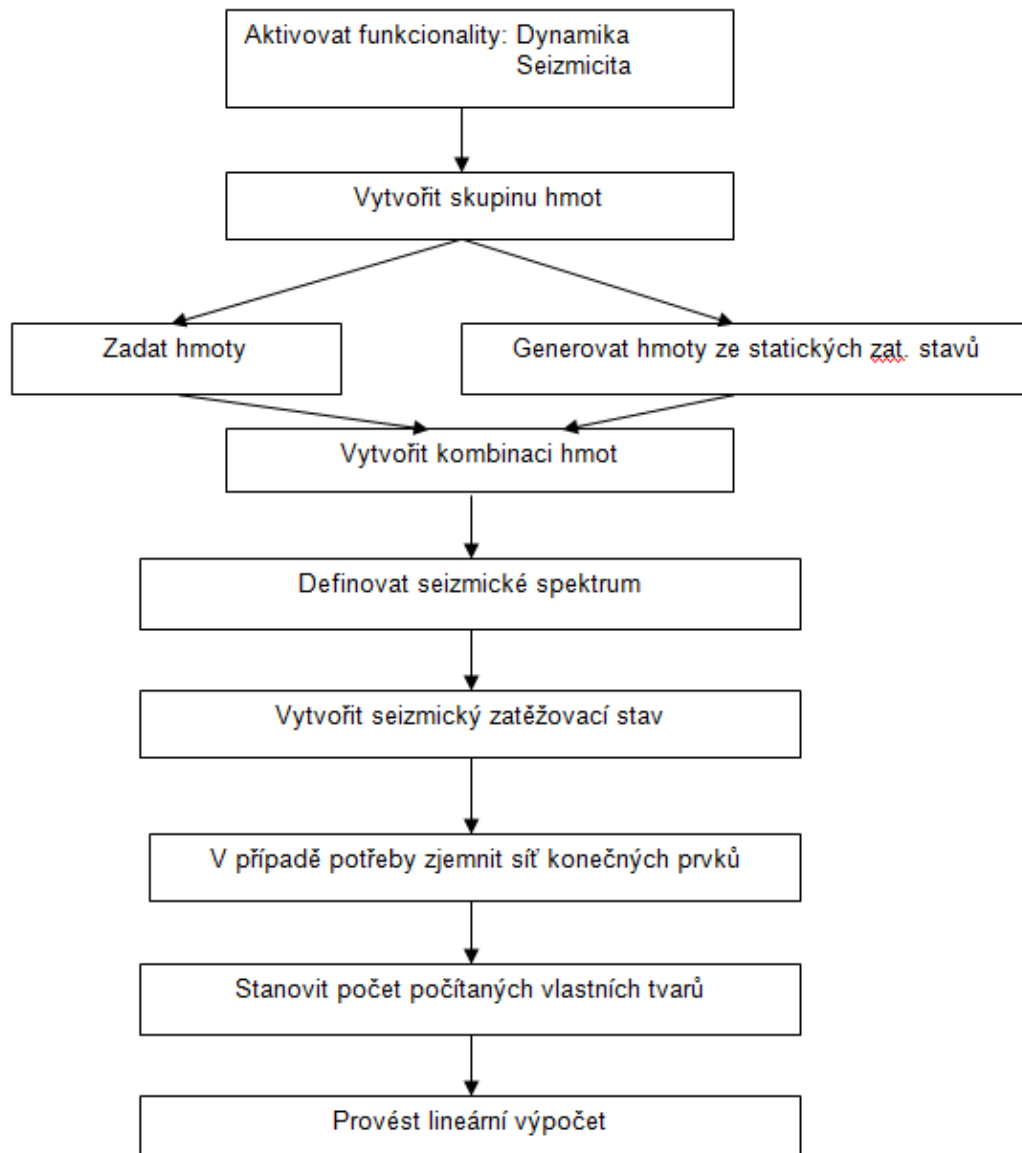
Celkový základní smyk pomocí SRSS: **78,69 kN**

Celkový základní smyk pomocí CQC: **6,37 kN**

Přesné řešení získané časovou analýzou: **5,44 kN**

V našem příkladu metoda SRSS nadhodnotila základní smyk řádově desetkrát. Schopnost metody **CQC** rozpoznat relativní znaménko členů u modální odezvy je klíčem k eliminování chyb metody **SRSS**.

Následující diagram ukazuje kroky potřebné k provedení spektrální analýzy:

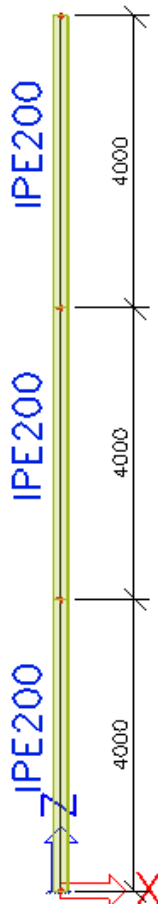


Jak bylo uvedeno v teoretické části, dynamický výpočet je převeden na ekvivalentní statický výpočet. Proto je spouštěn lineární výpočet. Během tohoto výpočtu se provede také výpočet

vlastního kmitání, protože jeho výsledky jsou třeba pro získání seizmických výsledků. Uvedený diagram je prakticky ilustrován v následujících příkladech.

Příklad 8: Spectral_Analysis_2.esa

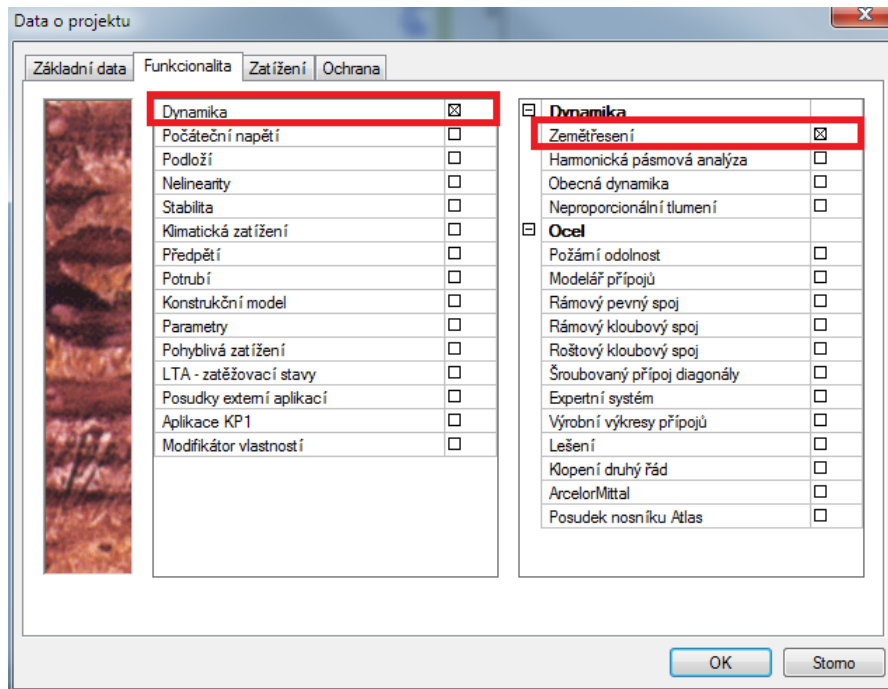
V tomto příkladu modelujeme trojpatrovou budovu jako konzolu. Všechny nosníky a sloupy mají průřez **IPE 200** a jsou vyrobeny z materiálu **S235** podle **EC-EN**. Výška každého patra je **4 m**. V úrovni každého patra nese konstrukce hmotu **500 kg**.



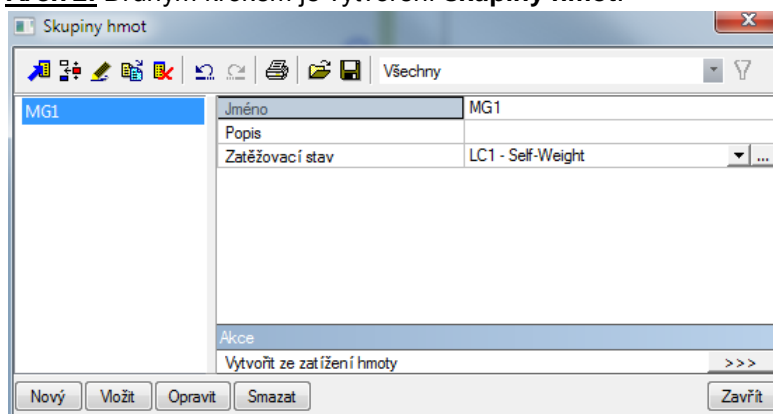
Vytvoříme jeden statický zatěžovací stav: **vlastní tíha** konstrukce. Abychom však při dynamickém výpočtu zanedbali vlastní tíhu, můžeme v knihovně materiálů nastavit objemovou hmotnost pro **S235** na **1 kg/m³**. Díky tomu bude jednodušší následná ruční kontrola výpočtu.

Konstrukce je vystavena zemětřesení podle Eurocode 8, s využitím návrhového spektra odezvy pro typ podloží **B** se součinitelem chování daným hodnotou **2**. Součinitel zrychlení je **0,35**.

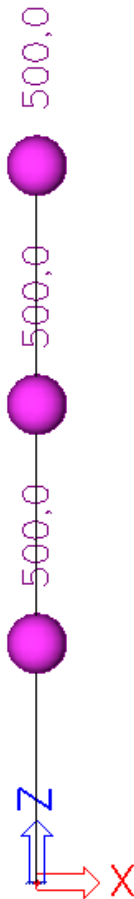
Krok 1: Prvním krokem v dynamickém výpočtu je aktivace funkcionality **Dynamika** na záložce **Funkcionalita** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**. Abychom provedli seizmický výpočet, je třeba aktivovat funkcionalitu **Zemětřesení**:



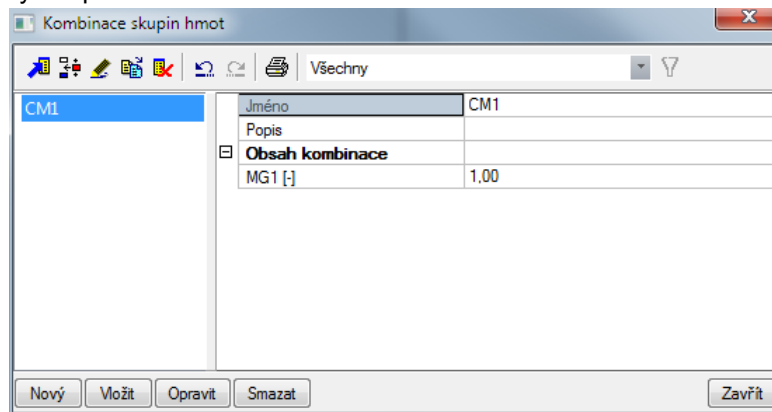
Krok 2: Druhým krokem je vytvoření skupiny hmot.



Krok 3: Po vytvoření skupiny hmot lze zadat hmotu **500 kg** do úrovně každého patra:

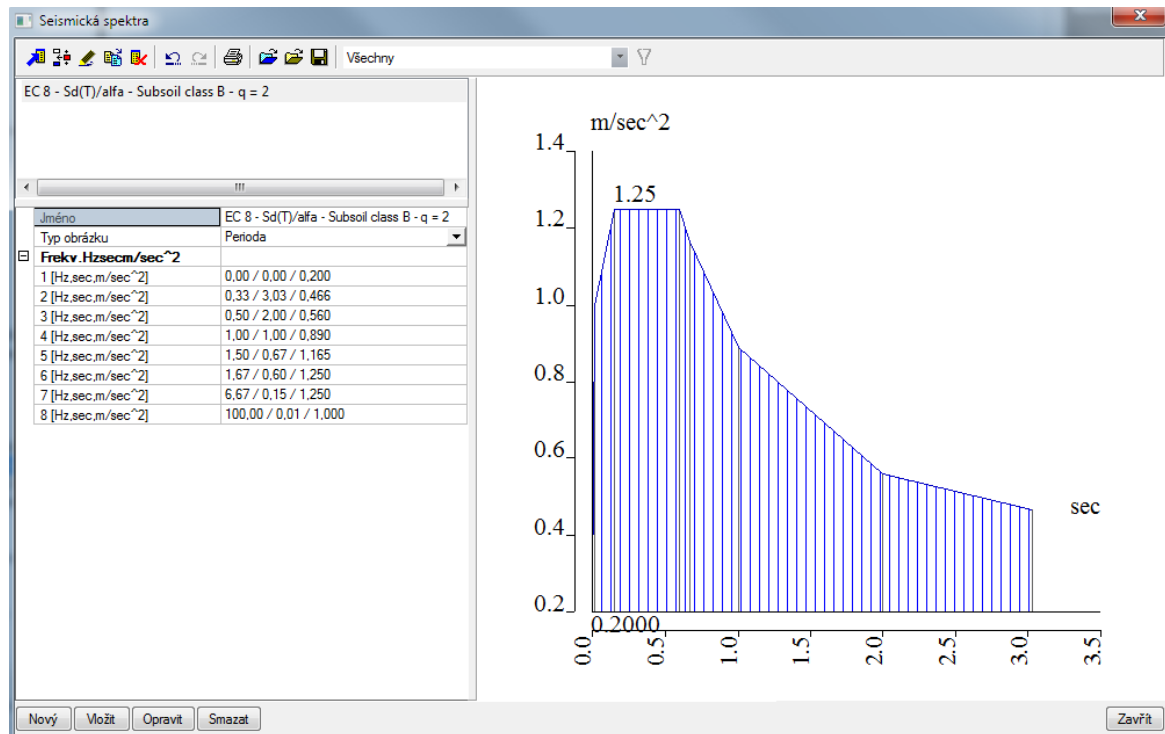


Krok 4: V dalším kroku přidáme skupinu hmot do **kombinace skupin hmot**, kterou lze využít pro definici seizmického zatěžovacího stavu.



Krok 5: Před vytvořením seizmického zatěžovacího stavu je nutno definovat seizmické spektrum. To lze provést funkcí **Knihovny > Zatížení > Seizmická spektra**.

Místo ručního zadání spektra použijeme **systemovou databázi**, která obsahuje spektra předdefinovaná normou Eurocode 8. V našem příkladu použijeme spektrum pro podloží typu **B** a součinitel chování **q = 2**:



Hodnoty spektra se určí jako $Sd(T)$ děleno α . Součinitel zrychlení bude definován u seismického zatěžovacího stavu, protože stejné spektrum může být použito pro různé hodnoty α .


Krok 6: Po vytvoření kombinace hmot, můžeme definovat **seismický** zatěžovací stav pomocí funkce **Zatěžovací stavy, kombinace > Zatěžovací stavy**. Typ působení zatěžovacího stavu se nastaví na **Nahodilé**. Typ zatěžovacího stavu lze pak změnit na **Dynamický**.

V položce **Specifikace** nastavíme typ dynamického zatěžovacího stavu na **Seismicita**.

Když vybereme tuto možnost, můžeme zadat parametry seismického zatěžovacího stavu:

Nejprve ze všeho aktivujeme volby **Seismické spektrum X, Y, Z**. Tato volby umožňují specifikovat, které seismické spektrum má být použito v jakém globálním směru.

V našem příkladu je definováno spektrum ve vodorovném směru X. Proto je aktivováno **Seismické spektrum X** a je vybráno spektrum zadané v předchozím kroku.

Pokud nebylo dosud definováno žádné spektrum, lze spektrum zadat pomocí tlačítka . Pokud seismické zatížení nepůsobí v jednom z globálních směrů, lze použít součinitele **směru X, Y, Z** pro zadání vektoru.

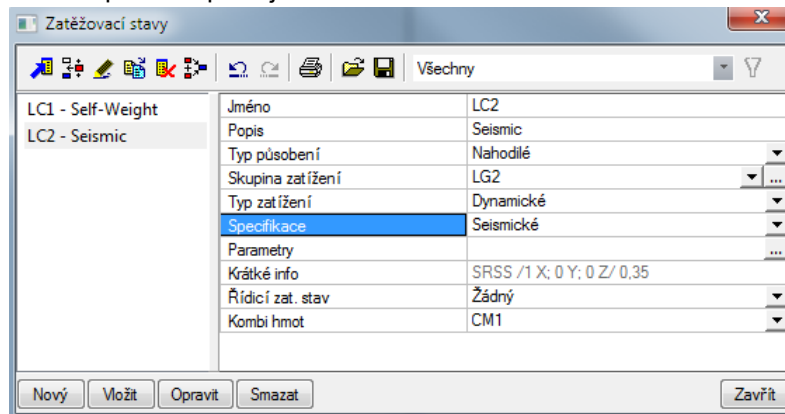
V našem příkladu působí seismické zatížení ve směru globální osy X a proto je součinitel u **směru X** nastaven na hodnotu **1**.

Jak bylo specifikováno v předchozím kroku, hodnoty seismického spektra se udávají jako **Sd(T)** vydělené α . Nyní můžeme zadat **součinitel zrychlení**. V našem příkladu zadáme hodnotu α rovnu **0,35**.

Parametr **převrácení** se použije v případě, že podpory konstrukce jsou umístěny nad úrovní terénu. Standardně je tato hodnota rovna **0**.

V políčku **Typ vyhodnocení** zvolíme **Metodu modální kombinace**. Jak bylo popsáno v teoretické části, pro **metodu CQC** je třeba definovat zvláštní spektrum tlumení. To bude ilustrováno v dalším příkladu.

V tomto příkladu použijeme **metodu SRSS**.



Poznámka

*Abychom se vyhnuli chybě SRSS metody s blízkými vlastními tvary, můžeme použít volbu **Násobné vlastní tvary**. Jak však bylo uvedeno v teoretické části, v takové situaci se doporučuje použít metodu CQC.*

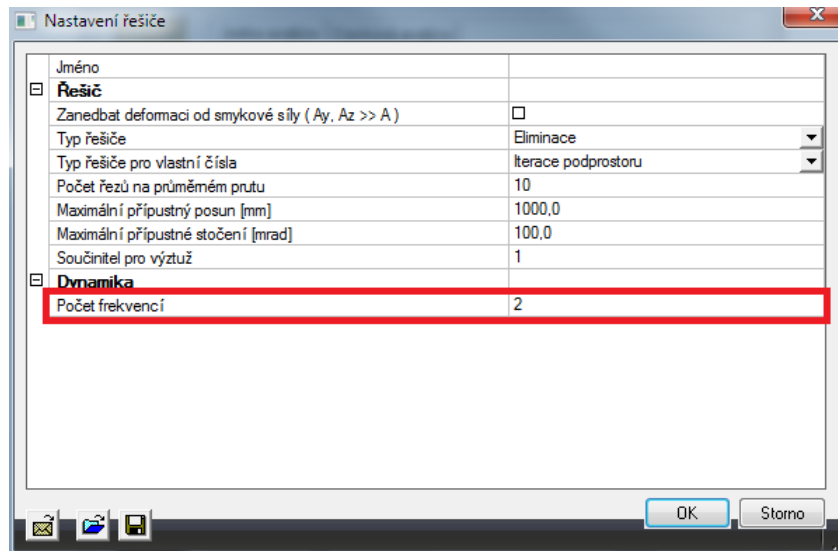
Krok 7: Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, abychom dostali přesné výsledky, je nutno zjemnit síť konečných prvků.

To lze provést v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení sítě**.

V našem příkladu však výchozí síť zjemňovat nebudeme, abychom mohli obdržené výsledky snadněji zkontrolovat ručním výpočtem.

Krok 8: Posledním krokem před spuštěním výpočtu je nastavení počtu počítaných vlastních tvarů. V našem příkladu zvolíme dva vlastní tvary.

Ve funkci **Výpočet, síť > Nastavení výpočtu** proto nastavíme počet frekvencí na **2**.



Krok 9: Tím jsme provedli všechny potřebné kroky a můžeme spustit **Lineární výpočet** funkcí **Výpočet, síť > Výpočet**.

Získáme následující výsledky:

Vlastní frekvence

N	f [Hz]	omega [1/sec]	omega^2 [1/sec^2]	T [sec]
Kombinace hmot : CM1				
1	0,53	3,30	10,89	1,90
2	3,42	21,52	463,05	0,29

Pomocí funkce **Deformace uzlů** zobrazíme **deformovanou konstrukci** a vlastní tvary:

1. vlastní tvar:



Přemístění uzlů

Vlastní tvary, Extrém : Ne
 Výběr : Vše
 Kombinace hmot : CM1/1 - 0,53
 Kvůli lepší numerické interpretaci jsou čísla vynásobena 10000.

Uzel sítě	Stav	Ux [-]	Uz [-]	Fiy [-]
1	CM1/1 - 0,53	0,00	0,00	0,00
2	CM1/1 - 0,53	61,28	0,00	28,21
2	CM1/1 - 0,53	61,28	0,00	28,21
3	CM1/1 - 0,53	208,03	0,00	42,96
3	CM1/1 - 0,53	208,03	0,00	42,96
4	CM1/1 - 0,53	391,11	0,00	47,14

2. vlastní tvar:**Přemístění uzlů**

Vlastní tvary, Extrém : Ne
 Výběr : Vše
 Kombinace hmot : CM1/2 - 3,42
 Kvůli lepší numerické interpretaci jsou čísla vynásobena 10000.

Uzel sítě	Stav	Ux [-]	Uz [-]	Fiy [-]
1	CM1/2 - 3,42	0,00	0,00	0,00
2	CM1/2 - 3,42	257,55	0,00	72,39
3	CM1/2 - 3,42	304,51	0,00	-84,93
3	CM1/2 - 3,42	304,51	0,00	-84,93
4	CM1/2 - 3,42	-202,33	0,00	-156,78

Protokol o výpočtu pro výpočet **Vlastních frekvencí** obsahuje následující informace:

Souč. participace tvaru

Režim	Omega	Perioda	Frek. [Hz]	Wxi / Wxtot	Wyi / Wytot	Wzi / Wztot
1	3.3007	1.9036	0.5253	0.7269	0.0000	0.0000
2	21.5192	0.2920	3.4249	0.2157	0.0000	0.0000
				0.9426	0.0000	0.0000

Jak bylo ukázáno již u prvního příkladu, **součinitele participace tvaru** definují množství hmoty, která kmitá v konkrétním vlastním tvaru jako procento celkové hmoty.

Pro první vlastní tvar kmitá **73 %** celkové hmoty. Pro druhý vlastní tvar kmitá **22 %** hmoty. V součtu tedy v těchto dvou vlastních tvarech kmitá **94 %** celkové hmoty.

Podle Eurocode 8 [7] musí být součet efektivních modálních hmot pro uvažované vlastní tvary alespoň **90 %** celkové hmoty konstrukce. Toto kritérium je splněno, což naznačuje, že v našem příkladu jsou dva vlastní tvary dostačující.

Podrobnosti o seizmickém výpočtu lze najít v **protokolu o výpočtu pro lineární výpočet**.

Dynamický zatěžovací stav: 2:LC2

Režim	Frek. [Hz]	Poměr tlumení	Souč. tlumení	Sax [m/s ²]	Say [m/s ²]	Saz [m/s ²]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.5253	0.0500	1.0000	0.2019	0.0000	0.0000	0.8119	0.2201	0.0000	0.0000	-2.2008
2	3.4249	0.0500	1.0000	0.4380	0.0000	0.0000	0.0170	0.1417	0.0000	0.0000	-0.4090
Úroveň=	0.00							0.26	0.00	0.00	2.24

Koeficient tlumení ukazuje ručně zadaný koeficient tlumení pro jednotlivé vlastní tvary. Je důležité pamatovat na to, že seizmická spektra v Eurocode 8 byla spočtena s koeficientem tlumení **5 %**, jak bylo popsáno v teoretické části. Pokud je zadán koeficient tlumení ručně, musí být spektra upravena. Toho dosáhneme pomocí součinitele tlumení.

Tlumení a **součinitel tlumení** budou probrány podrobněji v kapitole 5 a také v příštím příkladu.

Sax, **Say** a **Saz** ukazují spektrální zrychlení.

$G(j)$ je součinitel tvaru pro vlastní tvar j .

F_x a F_y jsou základní smyky pro každý vlastní tvar.

M_x a M_y jsou momenty převrácení pro každý vlastní tvar.

Poslední řádek v tabulce obsahuje globální odezvu. Tato odezva je stanovena pomocí metody SRSS pro kombinované modální odezvy.

Rovnice pro tyto parametry byly popsány v teoretické části a zde budou ilustrovány ručním výpočtem.

Ruční výpočet

V tomto odstavci budou ručně vypočteny seizmické výsledky určené programem Scia Engineer. Tím umožníme jasné pochopení aplikovaných vzorců. Všechny rovnice lze najít v odstavci „Protokol o výpočtu“ v této kapitole.

Nejprve ověříme **součinitele participace tvaru z protokolu o výpočtu pro vlastní frekvence**.

Jak ukazuje deformace uzlů, normalizované vlastní tvary pro obě vlastní frekvence jsou tyto:

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 0,039111 \\ 0,020803 \\ 0,006128 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} -0,020233 \\ 0,030451 \\ 0,025755 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Součinitel participace $\gamma_{k,(j)} = \{\phi_k\}^T \cdot \{m\}$

$$\Rightarrow \gamma_{x,(1)} = 0,039111 \cdot 500 + 0,020803 \cdot 500 + 0,006128 \cdot 500 = 33,021$$

$$\Rightarrow \gamma_{x,(2)} = -0,020233 \cdot 500 + 0,030451 \cdot 500 + 0,025755 \cdot 500 = 17,984$$

Efektivní hmoty: $M_{k,ef,(j)} = \gamma_{k,(j)}^2$

$$\Rightarrow M_{x,ef,(1)} = (33,021)^2 = 1090,39$$

$$\Rightarrow M_{x,ef,(2)} = (17,984)^2 = 323,42$$

Participační procento hmoty: $L_{k,(j)} = \frac{M_{k,ef,(j)}}{M_{k,tot}}$

$$\Rightarrow L_{x,(1)} = \frac{1090,39}{500 + 500 + 500} = \mathbf{0,7269}$$

$$\Rightarrow L_{x,(2)} = \frac{323,42}{500 + 500 + 500} = \mathbf{0,2156}$$

Tyto výsledky odpovídají hodnotám vypočteným programem.

V dalším ověříme podrobnosti o seizmickém výpočtu obsažené v **protokolu o výpočtu pro lineární výpočet**.

Dynamický zatěžovací stav: 2:LC2

Režim	Frek. [Hz]	Poměr tlumení	Souč. tlumení	Sax [m/s ²]	Say [m/s ²]	Saz [m/s ²]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.5253	0.0500	1.0000	0.2019	0.0000	0.0000	0.8119	0.2201	0.0000	0.0000	-2.2008
2	3.4249	0.0500	1.0000	0.4380	0.0000	0.0000	0.0170	0.1417	0.0000	0.0000	-0.4090
Úroveň=	0.00							0.26	0.00	0.00	2.24

Spektrální zrychlení S_{ax} pro oba vlastní tvary se vypočte pomocí definovaného seizmického spektra.

Spektrum pro typ podloží **B** se součinitelem chování $q = 2$ dává následující hodnoty $S_d(T)/\alpha$

Frekv. Hzsecm/sec ²	
1 [Hz,sec,m/sec ²]	0,00 / 0,00 / 0,200
2 [Hz,sec,m/sec ²]	0,33 / 3,03 / 0,466
3 [Hz,sec,m/sec ²]	0,50 / 2,00 / 0,560
4 [Hz,sec,m/sec ²]	1,00 / 1,00 / 0,890
5 [Hz,sec,m/sec ²]	1,50 / 0,67 / 1,165
6 [Hz,sec,m/sec ²]	1,67 / 0,60 / 1,250
7 [Hz,sec,m/sec ²]	6,67 / 0,15 / 1,250
8 [Hz,sec,m/sec ²]	100,00 / 0,01 / 1,000

První vlastní tvar má periodu $T_1 = 1,9036 \text{ s} \Rightarrow S_d(T_1)/\alpha = 0,5918 \text{ m/s}^2$

Druhý vlastní tvar má periodu $T_2 = 0,2920 \text{ s} \Rightarrow S_d(T_2)/\alpha = 1,25 \text{ m/s}^2$

V našem příkladu byl součinitel zrychlení α roven **0,35**.

$$\Rightarrow S_{ax,(1)} = 0,5918 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,35 = 0,2071 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow S_{ax,(2)} = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,35 = 0,4375 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Tyto výsledky odpovídají výsledkům spočteným programem. Drobné rozdíly jsou způsobeny tím, že program počítá s větším počtem desetinných míst. V dalších výpočtech použijeme spektrální zrychlení programu Scia Engineer.

Součinitel vlastního tvaru: $G_{k,(j)} = \frac{S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)}}{\omega_{(j)}^2}$

$$\Rightarrow G_{x,(1)} = \frac{0,2019 \cdot 33,021}{(3,3007)^2} = 0,6119$$

$$\Rightarrow G_{x,(2)} = \frac{0,4380 \cdot 17,984}{(21,5192)^2} = 0,0170$$

Tyto výsledky odpovídají hodnotám vypočteným programem.

Potřebné mezivýsledky jsou spočteny a tak nyní můžeme vyčíslit odezvu pro každý vlastní tvar.

Nejprve pro každý uzel vypočteme příčnou sílu. Příčné síly potom použijeme k výpočtu základního smyku a momentu převrácení.

Tvar 1:

Příčná síla v uzlu i: $F_{i,k,(j)} = m_{i,k,(j)} \cdot S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$F_{4,x,(1)} = 500 \text{ kg} \cdot 0,2019 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 33,021 \cdot 0,039111 = 130,38 \text{ N}$$

$$F_{3,x,(1)} = 500 \text{ kg} \cdot 0,2019 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 33,021 \cdot 0,020803 = 69,35 \text{ N}$$

$$F_{2,x,(1)} = 500 \text{ kg} \cdot 0,2019 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 33,021 \cdot 0,006128 = 20,43 \text{ N}$$

$$F_{1,x,(1)} = 0 \text{ N}$$

Základní smyková síla: $F_{k,(j)} = \sum_i F_{i,k,(j)}$

$$\Rightarrow F_{x,(1)} = 130,38 \text{ N} + 69,35 \text{ N} + 20,43 \text{ N} = 220,129 \text{ N} = \mathbf{0,2201 \text{ kN}}$$

Moment převrácení v uzlu i: $M_{i,k,(j)} = F_{i,k,(j)} \cdot z_i$

$$M_{4,y,(1)} = -130,38 N \cdot 12 m = -1564,50 Nm$$

$$M_{3,y,(1)} = -69,35 N \cdot 8 m = -554,77 Nm$$

$$M_{2,y,(1)} = -20,43 N \cdot 4 m = -81,71 Nm$$

$$M_{1,y,(1)} = 0 Nm$$

Moment převrácení: $M_{k,(j)} = \sum_i M_{i,k,(j)}$

$$\Rightarrow M_{y,(1)} = -1564,50 Nm - 554,77 Nm - 81,71 Nm = -2200,99 Nm = -2,2009 kNm$$



Poznámka

V tomto vlastním tvaru jsou všechny příčné síly orientovány stejným směrem. Příčná zatížení v uzlech jsou v našem případě orientována ve směru záporné osy X a proto je základní smyková síla orientována ve směru kladné osy X. Příčná zatížení v uzlech tak produkují záporný moment převrácení kolem osy Y. Příklad tohoto principu lze najít v literatuře [26].

Jak bylo však uvedeno v předchozích kapitolách, znaménka zde nemají žádnou podstatnou úlohu, protože amplitudy kmitání se vždy objevují na obou stranách rovnovážné polohy.

Tvar 2:

Příčná síla v uzlu i: $F_{i,k,(j)} = m_{i,k,(j)} \cdot S_{a,k,(j)} \cdot \gamma_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$F_{4,x,(2)} = 500 kg \cdot 0,4380 \frac{m}{s^2} \cdot 17,984 \cdot -0,020233 = -79,69 N$$

$$F_{3,x,(2)} = 500 kg \cdot 0,4380 \frac{m}{s^2} \cdot 17,984 \cdot 0,030451 = 119,93 N$$

$$F_{2,x,(2)} = 500 kg \cdot 0,4380 \frac{m}{s^2} \cdot 17,984 \cdot 0,025755 = 101,44 N$$

$$F_{1,x,(2)} = 0 N$$

Základní smyková síla: $F_{k,(j)} = \sum_i F_{i,k,(j)}$

$$\Rightarrow F_{x,(2)} = -79,69 N + 119,93 N + 101,44 N = 141,68 N = \mathbf{0,1417 kN}$$

Moment převrácení v uzlu i: $M_{i,k,(j)} = F_{i,k,(j)} \cdot z_i$

$$M_{4,y,(2)} = 79,69 N \cdot 12 m = 956,25 Nm$$

$$M_{3,y,(2)} = -119,93 N \cdot 8 m = -959,45 Nm$$

$$M_{2,y,(2)} = -101,44 N \cdot 4 m = -405,74 Nm$$

$$M_{1,y,(2)} = 0 Nm$$

Moment převrácení: $M_{k,(j)} = \sum_i M_{i,k,(j)}$

$$\Rightarrow M_{y,(2)} = 956,25 Nm - 959,45 Nm - 405,74 Nm = -408,94 Nm = \mathbf{-0,4089 kNm}$$

Abychom získali globální odezvu, musíme modální odezvy zkombinovat. V tomto příkladě použijeme metodu **SRSS**:

$$F_x = \sqrt{(F_{x,(1)})^2 + (F_{x,(2)})^2} = \sqrt{(0,2201 \text{ kN})^2 + (0,1417 \text{ kN})^2} = \mathbf{0,2618 \text{ kN}}$$

$$M_y = \sqrt{(M_{y,(1)})^2 + (M_{y,(2)})^2} = \sqrt{(-2,2009 \text{ kNm})^2 + (-0,4089 \text{ kNm})^2} = \mathbf{2,238 \text{ kNm}}$$

Tyto výsledky přesně odpovídají hodnotám vypočteným programem.

Jak bylo uvedeno v teoretické části, stejné principy můžeme nyní použít pro výpočet přemístění a zrychlení v každém z uzlů. Tyto modální odezvy lze potom zkombinovat a získat tak globální přemístění a zrychlení konstrukce.

Tvar 1:

Přemístění v uzlu i: $u_{i,k,(j)} = G_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$u_{4,x,(1)} = 0,6119 \cdot 0,039111 = 0,02393 \text{ m} = \mathbf{23,93 \text{ mm}}$$

$$u_{3,x,(1)} = 0,6119 \cdot 0,020803 = 0,01273 \text{ m} = \mathbf{12,73 \text{ mm}}$$

$$u_{2,x,(1)} = 0,6119 \cdot 0,006128 = 0,00375 \text{ m} = \mathbf{3,75 \text{ mm}}$$

$$u_{1,x,(1)} = \mathbf{0 \text{ mm}}$$

Zrychlení v uzlu i: $\ddot{u}_{i,k,(j)} = \omega_{(j)}^2 \cdot G_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$a_{4,x,(1)} = (3,3007)^2 \cdot 0,6119 \cdot 0,039111 = 0,26073 \text{ m/s}^2 = \mathbf{260,73 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{3,x,(1)} = (3,3007)^2 \cdot 0,6119 \cdot 0,020803 = 0,13868 \text{ m/s}^2 = \mathbf{138,68 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{2,x,(1)} = (3,3007)^2 \cdot 0,6119 \cdot 0,006128 = 0,04085 \text{ m/s}^2 = \mathbf{40,85 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{1,x,(1)} = \mathbf{0 \text{ mm/s}^2}$$

Tvar 2:

Přemístění v uzlu i: $u_{i,k,(j)} = G_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$u_{4,x,(2)} = 0,0170 \cdot (-0,020233) = -0,00034 \text{ m} = \mathbf{-0,34 \text{ mm}}$$

$$u_{3,x,(2)} = 0,0170 \cdot 0,030451 = 0,00052 \text{ m} = \mathbf{0,52 \text{ mm}}$$

$$u_{2,x,(2)} = 0,0170 \cdot 0,025755 = 0,00044 \text{ m} = \mathbf{0,44 \text{ mm}}$$

$$u_{1,x,(2)} = \mathbf{0 \text{ mm}}$$

Zrychlení v uzlu i: $\ddot{u}_{i,k,(j)} = \omega_{(j)}^2 \cdot G_{k,(j)} \cdot \phi_{i,k,(j)}$

$$a_{4,x,(2)} = (21,5192)^2 \cdot 0,0170 \cdot (-0,020233) = -0,15928 \text{ m/s}^2 = \mathbf{-159,28 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{3,x,(2)} = (21,5192)^2 \cdot 0,0170 \cdot 0,030451 = 0,23972 \text{ m/s}^2 = \mathbf{239,72 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{2,x,(2)} = (21,5192)^2 \cdot 0,0170 \cdot 0,025755 = 0,20275 \text{ m/s}^2 = \mathbf{202,75 \text{ mm/s}^2}$$

$$a_{1,x,(2)} = 0 \text{ mm/s}^2$$

Abychom získali globální odezvu, musíme modální odezvy zkombinovat. V tomto příkladě použijeme metodu **SRSS**:

Přemístění:

$$u_{4,x} = \sqrt{(u_{4,x,(1)})^2 + (u_{4,x,(2)})^2} = \sqrt{(23,93)^2 + (-0,34)^2} = 23,93 \text{ mm}$$

$$u_{3,x} = \sqrt{(u_{3,x,(1)})^2 + (u_{3,x,(2)})^2} = \sqrt{(12,73)^2 + (0,52)^2} = 12,74 \text{ mm}$$

$$u_{2,x} = \sqrt{(u_{2,x,(1)})^2 + (u_{2,x,(2)})^2} = \sqrt{(3,75)^2 + (0,44)^2} = 3,78 \text{ mm}$$

$$u_{1,x} = 0 \text{ mm}$$

Zrychlení:

$$a_{4,x} = \sqrt{(a_{4,x,(1)})^2 + (a_{4,x,(2)})^2} = \sqrt{(260,73)^2 + (-159,28)^2} = 305,53 \text{ mm/s}^2$$

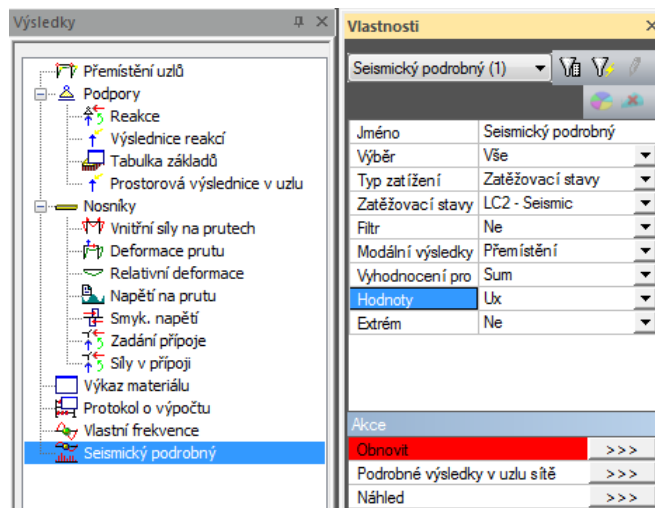
$$a_{3,x} = \sqrt{(a_{3,x,(1)})^2 + (a_{3,x,(2)})^2} = \sqrt{(138,68)^2 + (239,72)^2} = 276,94 \text{ mm/s}^2$$

$$a_{2,x} = \sqrt{(a_{2,x,(1)})^2 + (a_{2,x,(2)})^2} = \sqrt{(40,85)^2 + (202,75)^2} = 206,82 \text{ mm/s}^2$$

$$a_{1,x} = 0 \text{ mm/s}^2$$

V programu je k dispozici speciální výsledková nabídka **Podrobné seizmické výsledky**, kde lze tato modální přemístění a zrychlení zobrazit.

V okně vlastností můžeme nastavit parametry pro zobrazení modálních výsledků:



- V položce **Zatěžovací stavy** vybereme seizmický zatěžovací stav.
- V položce **Modální výsledky** můžeme zvolit, zda nás zajímají přemístění nebo zrychlení.
- Položka **Vyhodnocení pro** určuje, které výsledky mají být zobrazeny: výsledky pro určitý **vlastní tvar**, výsledky pro **všechny vlastní tvary** nebo globální **sumarizované** výsledky.

Získáme následující výsledky:
Modální přemístění:

Seismický podrobný

Lineární výpočet, Extrém : Ne
Výběr : Vše
Zatěžovací stavy : LC2
Modální výsledky : Přemístění
Vyhodnocení pro : Všechny vlastní tvary

Uzel	X [m]	Y [m]	Z [m]	Mode	Ux [mm]	Uy [mm]	Uz [mm]	Fix [mrad]	Fiy [mrad]	Fiz [mrad]
N1	0,000	0,000	0,000	1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
N1	0,000	0,000	0,000	2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
N2	0,000	0,000	4,000	1	3,7	0,0	0,0	0,0	1,7	0,0
N2	0,000	0,000	4,000	2	0,4	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
N3	0,000	0,000	8,000	1	12,7	0,0	0,0	0,0	2,6	0,0
N3	0,000	0,000	8,000	2	0,5	0,0	0,0	0,0	-0,1	0,0
N4	0,000	0,000	12,000	1	23,9	0,0	0,0	0,0	2,9	0,0
N4	0,000	0,000	12,000	2	-0,3	0,0	0,0	0,0	-0,3	0,0

Modální zrychlení (Akcelerace):

Seismický podrobný

Lineární výpočet, Extrém : Ne
Výběr : Vše
Zatěžovací stavy : LC2
Modální výsledky : Akcelerace
Vyhodnocení pro : Všechny vlastní tvary

Stav	Uzel	X [m]	Y [m]	Z [m]	Mode	Ax [mm/sec ²]	Ay [mm/sec ²]	Az [mm/sec ²]	Alphax [mrad/sec ²]	Alphay [mrad/sec ²]	Alphaz [mrad/sec ²]
LC2	N1	0,000	0,000	0,000	1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
LC2	N1	0,000	0,000	0,000	2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
LC2	N2	0,000	0,000	4,000	1	40,9	0,0	0,0	0,0	18,8	0,0
LC2	N2	0,000	0,000	4,000	2	202,9	0,0	0,0	0,0	57,0	0,0
LC2	N3	0,000	0,000	8,000	1	138,7	0,0	0,0	0,0	28,6	0,0
LC2	N3	0,000	0,000	8,000	2	239,9	0,0	0,0	0,0	-51,2	0,0
LC2	N4	0,000	0,000	12,000	1	260,7	0,0	0,0	0,0	31,4	0,0
LC2	N4	0,000	0,000	12,000	2	-159,4	0,0	0,0	0,0	-123,5	0,0

Sumarizovaná přemístění:

Seismický podrobný

Lineární výpočet, Extrém : Ne
Výběr : Vše
Zatěžovací stavy : LC2
Modální výsledky : Přemístění
Vyhodnocení pro : Sum

Uzel	X [m]	Y [m]	Z [m]	Ux [mm]	Uy [mm]	Uz [mm]	Fix [mrad]	Fiy [mrad]	Fiz [mrad]
N1	0,000	0,000	0,000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
N2	0,000	0,000	4,000	-3,8	0,0	0,0	0,0	-1,7	0,0
N3	0,000	0,000	8,000	-12,7	0,0	0,0	0,0	-2,6	0,0
N4	0,000	0,000	12,000	-23,9	0,0	0,0	0,0	-2,9	0,0

Sumarizovaná zrychlení:

Seismický podrobný

Lineární výpočet, Extrém : Ne
Výběr : Vše
Zatěžovací stavy : LC2
Modální výsledky : Akcelerace
Vyhodnocení pro : Sum

Stav	Uzel	X [m]	Y [m]	Z [m]	Ax [mm/sec ²]	Ay [mm/sec ²]	Az [mm/sec ²]	Alphax [mrad/sec ²]	Alphay [mrad/sec ²]	Alphaz [mrad/sec ²]
LC2	N1	0,000	0,000	0,000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
LC2	N2	0,000	0,000	4,000	-207,0	0,0	0,0	0,0	-60,0	0,0
LC2	N3	0,000	0,000	8,000	-277,1	0,0	0,0	0,0	-58,6	0,0
LC2	N4	0,000	0,000	12,000	-305,6	0,0	0,0	0,0	-127,4	0,0

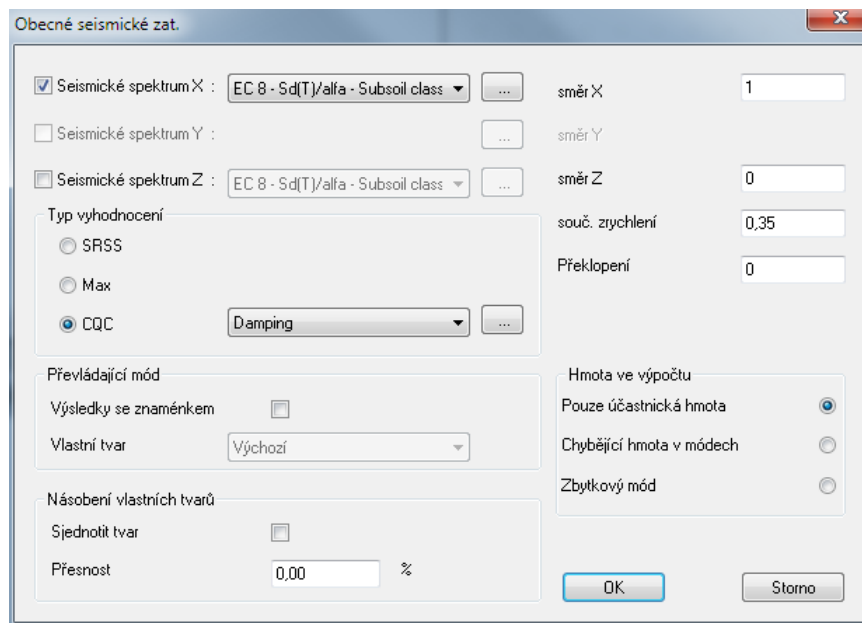
Při porovnání výsledků ručního výpočtu s výsledky získanými programem vidíme velmi dobrou shodu.

Jak bylo popsáno v teoretické části, pro **metodu CQC** je třeba definovat spektrum tlumení. Pro ilustraci vypočteme výše uvedený příklad znovu, ale tentokrát použijeme metodu **CQC**.

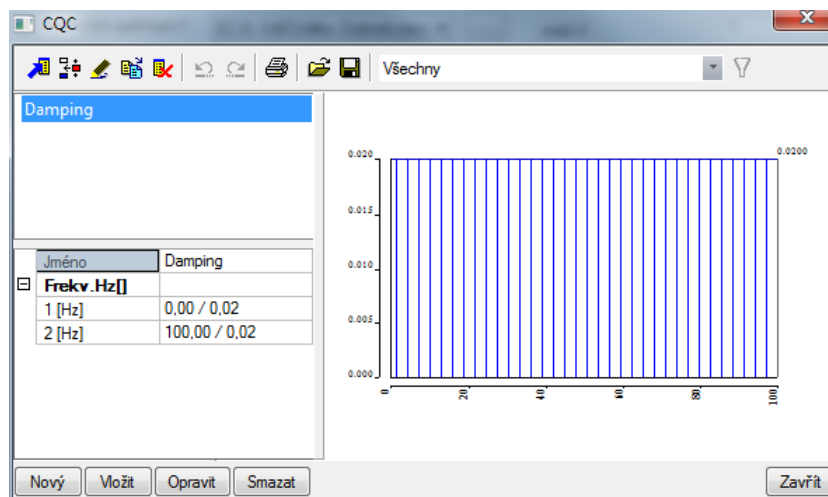
Příklad 9: Spectral Analysis 3.esa

Zopakujeme předchozí příklad, ale nyní použijeme metodu **CQC**. Pro všechny frekvence použijeme koeficient tlumení **2 %**.

V **kroku 6** zvolíme jako **typ vyhodnocení** metodu **CQC**:



Pomocí tlačítka **...** za volbou CQC zadáme spektrum tlumení. Protože v našem příkladu použijeme pro všechny vlastní tvary konstantní koeficient tlumení, zadáme hodnotu **2 %** pro frekvence od **0 Hz** do **100 Hz**.



Toto spektrum tlumení bude použito pro výpočet **modálních vzájemných korelačních koeficientů** metody **CQC** a také pro výpočet **součinitelů tlumení** pro každý vlastní tvar, jak bylo vysvětleno v předchozí kapitole.

Po zadání spektra lze znovu spustit **lineární výpočet**.

Následující výsledky byly získány z **protokolu o výpočtu pro lineární výpočet**:

Dynamický zatěžovací stav: 2:LC2

Režim	Frek. [Hz]	Poměr tlumení	Souč. tlumení	Sax [m/s ²]	Say [m/s ²]	Saz [m/s ²]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.5253	0.0200	1.1952	0.2413	0.0000	0.0000	0.7313	0.2631	0.0000	0.0000	-2.6304
2	3.4249	0.0200	1.1952	0.5235	0.0000	0.0000	0.0203	0.1694	0.0000	0.0000	-0.4889
Úroveň=	0.00							0.31	0.00	0.00	2.68

Výsledky ukazují, že pro každý vlastní tvar je **koeficient tlumení** roven hodnotě **2 %**.

Jak bylo uvedeno v teoretické části, seizmická spektra v Eurocode 8 byla definována s koeficientem tlumení 5 %. Protože nyní je pro tlumení použita jiná hodnota, musí se spektrum upravit pomocí **součinitele tlumení** η .

Podle Eurocode 8 [6] se součinitel vypočte následujícím způsobem:

$$\eta = \sqrt{\frac{7}{(2 + \xi)}} \geq 0,7 \quad (4.13)$$

Kde: ξ = koeficient tlumení vyjádřený v procentech.

Pro výchozí hodnotu koeficientu tlumení **5 %** se součinitel η rovná jedné.

Spodní hranice **0,7** pro součinitel tlumení naznačuje, že koeficient tlumení vyšší než \pm **14,3%** nemá již žádný vliv na seizmické spektrum.

Přesný návod na použití součinitele η v rovnicích návrhového seizmického spektra naleznete v Eurocode 8 [6]. V tomto příkladu vede koeficient tlumení 2 % k následujícímu součiniteli tlumení:

$$\eta = \sqrt{\frac{7}{(2 + 2)}} = 1,3229$$

To znamená, že spektrální zrychlení budou zvětšena o **32 %** kvůli tomu, že v konstrukci je méně tlumení. Spektrální zrychlení z předchozího příkladu tak mohou být vynásobena součinitelem η :

$$\Rightarrow S_{ax,(1)} = 0,2019 \frac{m}{s^2} \cdot 1,3229 = 0,2671 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow S_{ax,(2)} = 0,4380 \frac{m}{s^2} \cdot 1,3229 = 0,5794 \frac{m}{s^2}$$

Tato nová spektrální zrychlení mohou být nyní použita v opakovaném výpočtu základního smyku, momentu převrácení atd.

Ruční výpočet

V tomto odstavci bude ilustrováno použití metody **CQC** pro výpočet globální odezvy základního smyku.

$$\text{Tvar 1: } \omega_{(1)} = 3,3007 \text{ rad/s}$$

$$F_{(1)} = 0,2912 \text{ kN}$$

$$\text{Tvar 2: } \omega_{(2)} = 21,5192 \text{ rad/s}$$

$$F_{(2)} = 0,1875 \text{ kN}$$

V tabulkovém procesoru vypočteme modální vzájemné korelační koeficienty $\rho_{i,j}$ pro koeficient tlumení $\xi_{i,j} = 2\%$.

Tvar	1	2
1	1	0,0002 3245
2	0,0002 3245	1

$$\begin{aligned}
 R_{tot} &= \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{(i)} \cdot \rho_{i,j} \cdot R_{(j)}} \\
 &= \sqrt{0,2912kN \cdot 1 \cdot 0,2912kN + 0,2912kN \cdot 0,00023245 \cdot 0,1875kN} \\
 &\quad + 0,1875kN \cdot 0,00023245 \cdot 0,2912kN + 0,1875kN \cdot 1 \cdot 0,1875kN \\
 &= 0,346kN
 \end{aligned}$$

5. Tlumení:

V předchozích kapitolách byl vysvětlen vliv tlumení na dynamickou odezvu konstrukce. Vliv tlumení byl patrný zejména v blízkosti rezonance.

V této kapitole se na problematiku tlumení podíváme podrobněji. Nejprve vysvětlíme teorii a pak provedeme zadání nerovnoměrného tlumení v programu Scia Engineer.

Pomocí příkladů z předchozí kapitoly budeme ilustrovat vliv tlumení na seizmickou odezvu. Kapitola bude ukončena příkladem prostorové konstrukce, kde bude uvažováno materiálové tlumení různých prvků.

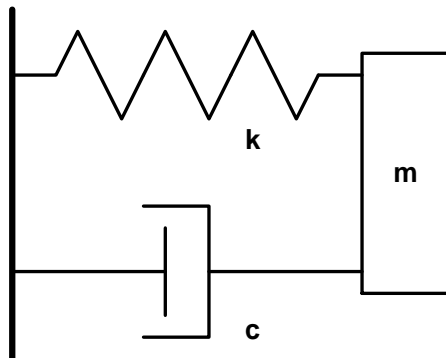
5.1 Teorie

Tlumení může mít různé příčiny. Složkou, která je přítomná vždy, je konstrukční tlumení. Konstrukční tlumení je způsobeno hysterezí v materiálu: přeměnou malého množství energie na teplo při každém cyklu, případně ještě zvětšenou o tření mezi jednotlivými vnitřními částmi.

Dalšími příčinami jsou základová zemina pod budovou a aerodynamické tlumení způsobené odkloněním energie vzduchem [22]. V mnoha případech je tlumení zvětšeno ještě uměle instalovanými tlumiči.

Stejně jako u předchozích kapitol i zde nejprve objasníme teorii. Úplný přehled lze najít v [1].

Uvažujme následující volně kmitající systém s tlumením:



Těleso o hmotnosti m se může v jednom směru volně pohybovat. Pružina o konstantní tuhosti k připevněná k tělesu je na svém druhém konci vetknutá. Hmota podléhá tlumení s tlumicí schopností c .

Pohybovou rovnici lze v maticovém zápisu napsat ve tvaru:

$$M \cdot \ddot{x}(t) + C \cdot \dot{x}(t) + K \cdot x(t) = 0 \quad (5.1)$$

Možné řešení této rovnice je typu:

$$x = A \cdot e^{st} \quad (5.2)$$

Dosazením (5.2) do (5.1) dostaneme:

$$M \cdot s^2 \cdot A \cdot e^{st} + C \cdot s \cdot A \cdot e^{st} + K \cdot A \cdot e^{st} = 0 \quad (5.3)$$

Rovnici lze přepsat:

$$s^2 + 2 \cdot n \cdot s + \omega_n^2 = 0 \quad (5.4)$$

$$\text{Kde: } n = \frac{C}{2M} \quad (5.5)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (5.6)$$

Možná řešení pro rovnici (5.4) jsou:

$$s = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_n^2} \quad (5.7)$$

Je zřejmé, že odezva systému závisí na numerické hodnotě odmocniny. Proto je třeba prozkoumat následující tři možnosti:

$$n = \omega_n$$

$$n < \omega_n \quad (5.8)$$

$$n > \omega_n$$

To lze přepsat:

$$C = 2 \cdot \sqrt{K \cdot M}$$

$$C < 2 \cdot \sqrt{K \cdot M}$$

(5.9)

$$C > 2 \cdot \sqrt{K \cdot M}$$

Podmínka $C = 2 \cdot \sqrt{K \cdot M} = C_c$ se nazývá *kritické tlumení*. V tomto případě je přemístěné těleso vráceno do rovnovážného stavu v nejkratším možném čase bez oscilace.

Poměr $\xi = \frac{C}{C_c}$ se nazývá *koeficient tlumení* nebo *relativní tlumení*.

Proto, pokud předpokládáme $n = \xi \cdot \omega_n$, můžeme rovnici (5.5) přepsat:

$$C = 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot M \quad (5.10)$$

Tři možnosti rovnice (5.8) lze napsat:

$$\xi = 1$$

$$\xi < 1 \quad (5.11)$$

$$\xi > 1$$

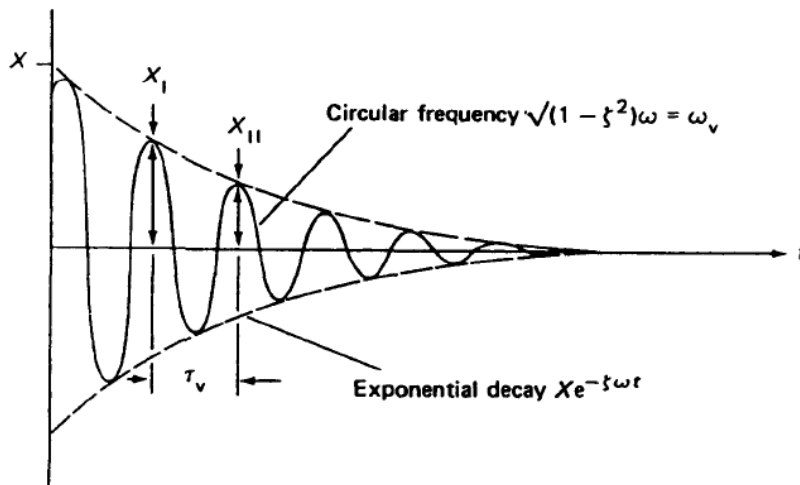
Pokud se podíváme na podmínky $\xi = 1$ a $\xi > 1$, lze ukázat, že neexistuje žádné harmonické řešení.

Pouze podmínka $\xi < 1$ dává harmonické řešení.

Pokud zavedeme *tlumenou kruhovou frekvenci* $\omega_D = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$, lze řešení rovnice (5.1) zapsat:

$$x = e^{-\xi\omega_n t} \{A \cdot \cos(\omega_D t) + B \cdot \sin(\omega_D t)\} \quad (5.12)$$

V kapitole 2 byla tato rovnice kmitání ilustrována následujícím obrázkem:



Legenda:

Circular frequency = kruhová frekvence

Exponential decay = exponenciální doznívání

Vhodným způsobem k určení tlumení v systému se ukázal být **logaritmický dekrement** Λ , který je přirozeným logaritmem poměru jakýchkoli dvou po sobě následujících amplitud ve stejném směru.

$$\Lambda = \ln \frac{X_1}{X_{11}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (5.13)$$



Poznámka

Jak bylo ukázáno výše, kruhová frekvence se redukuje účinkem tlumení a tím se získá tlumená kruhová frekvence. V mnoha systémech je však tato redukce malá, protože jsou časté velmi malé hodnoty ξ ; např. ve většině inženýrských konstrukcí je ξ zřídka větší než 0,02. A i když $\xi = 0,2$, tak $\omega_D = 0,98\omega_n$.

Příloha B přináší některé číselné hodnoty koeficientu tlumení.

5.2 Tlumení ve Scia Engineer

V programu Scia Engineer lze tlumení zadat na 1D prvcích, na 2D prvcích a v podporách. Tlumení každého z těchto prvků (nebo subkonstrukcí) bude použito ve výpočtu modálního koeficientu tlumení pro celou konstrukci pro každý vlastní tvar. V literatuře se toto označuje jako **smíšené tlumení**.

Smíšené tlumení se používá u částečně šroubovaných konstrukcí, částečně svařovaných konstrukcí, spřažených ocelo-betonových konstrukcí na podloží apod.

U konstrukčních systémů, které jsou složeny ze subkonstrukcí o různých tlumicích vlastnostech, lze matici tlumení C sestavit příslušnou superpozicí matic tlumení C_i dílčích subkonstrukcí:

$$C = \sum_{i=1}^N C_i \quad (5.14)$$

Kde: C_i = matice tlumení pro i-tou subkonstrukci v globálním souřadném systému.

N = počet sestavovaných subkonstrukcí.

Proporcionální tlumení (Rayleighovo tlumení)

Způsob předepsání tlumení předpokládá, že matice tlumení je tvořena lineární kombinací matic hmotnosti a tuhosti.

$$C_i = \alpha_i \cdot M_i + \beta_i \cdot K_i \quad (5.15)$$

Kde: α_i a β_i = součinitele proporcionálního tlumení pro i-tou část konstrukce.

M_i = matice hmotnosti pro i-tou část konstrukce v globálním souřadnicovém systému.

K_i = matice tuhosti pro i-tou část konstrukce v globálním souřadnicovém systému.

Rovnice pro tyto součinitele proporcionálního tlumení můžete najít v literatuře [19]. Příklady naleznete v literatuře [20].

Tlumení vážené podle tuhosti

Pro konstrukce nebo konstrukční systémy sestávající z hlavních subkonstrukcí nebo komponent s různými charakteristikami tlumení lze hodnoty smíšeného modálního tlumení vypočítat z pružné energie konstrukce [8], [21]:

$$\xi_j = \frac{\sum_{i=1}^N \xi_i \cdot E_i}{E} \quad (5.16)$$

Kde: ξ_j = koeficient tlumení uvažovaného vlastního tvaru.

E = pružná energie konstrukce asociovaná s modálním přemístěním uvažovaného vlastního tvaru.

N = počet všech subkonstrukcí.

ξ_i = koeficient tlumení pro i-tou subkonstrukci.

E_i = pružná energie pro i-tou subkonstrukci asociovaná s modálním přemístěním uvažovaného vlastního tvaru.

Rovnici (5.16) lze přepsat v následujícím tvaru [19]:

$$\xi_j = \frac{\Phi_j^T \cdot \left[\sum_{i=1}^N [\xi K]_i \right] \cdot \Phi_j}{\omega_j^2} \quad (5.17)$$

Kde: $[\xi K]_i$ = matice tuhosti pro i-tou subkonstrukci v globálním souřadném systému vynásobená modálním koeficientem tlumení i-té subkonstrukce.

**Poznámka**

Tuto rovnici lze používat, pokud jsou výsledné hodnoty tlumení menší než 20 % kritického tlumení. Pokud jsou vypočtené hodnoty větší než 20 %, je třeba provést další opravy.

Jak bylo již řečeno, v programu Scia Engineer lze zadat koeficient tlumení na každý prvek. Pro tento koeficient lze použít také tlumení materiálu, ze kterého je prvek vyroben. Pokud není zadán žádný koeficient tlumení, použije se výchozí hodnota, protože všechny prvky musí mít přiřazen nějaký koeficient tlumení, aby bylo možno použít výše uvedené rovnice. Zadání těchto výchozích hodnot bude ukázáno na následujících příkladech.

Analogicky k zadání dalších objektů v programu Scia Engineer, se **tlumení** na prvcích sdružuje do **skupin tlumení**. Následně pak může být tato skupina přiřazena **kombinaci skupin hmot**.

Tlumení podpor

Navíc k tlumení 1D a 2D prvků dovoluje program Scia Engineer zadat tlumič na pružnou uzlovou podporu. Modální koeficient tlumení ξ_j se vypočte podle následujícího vzorce:

$$\xi_j = Alfa \cdot \frac{\Phi_{s,j}^T \cdot \left[\sum_s C_s \right] \cdot \Phi_{s,j}}{4 \cdot \omega_j} \quad (5.18)$$

Kde: ω_j = kruhová frekvence vlastního tvaru j

$\Phi_{s,j}$ = modální přemístění v podporovém uzlu s pro vlastní tvar j

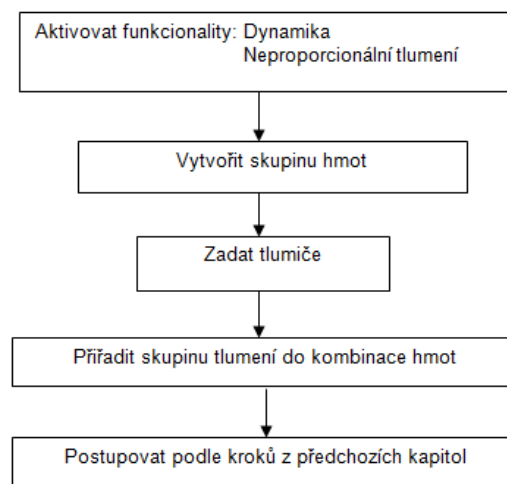
C_s = tlumicí konstanta podpory

Alfa = uživatelem definovaný parametr (> 0)

Celkový modální koeficient tlumení může být vypočten jako součet rovnic (5.17) a (5.18).

Jak bylo již uvedeno, na všech 1D a 2D prvcích musí být definován koeficient tlumení. Tato podmínka se však netýká podpor. Ne každá podpora musí mít přiřazenu hodnotu tlumení.

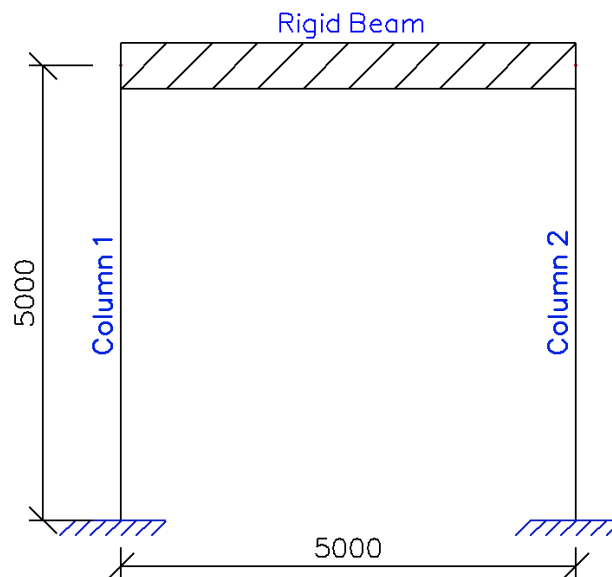
Následující diagram ukazuje, jak se neproporcionální tlumení zadává v programu SCIA-ESA PT.



Použití tlumičů a výpočet smíšeného koeficientu tlumení bude ukázáno v následujících příkladech.

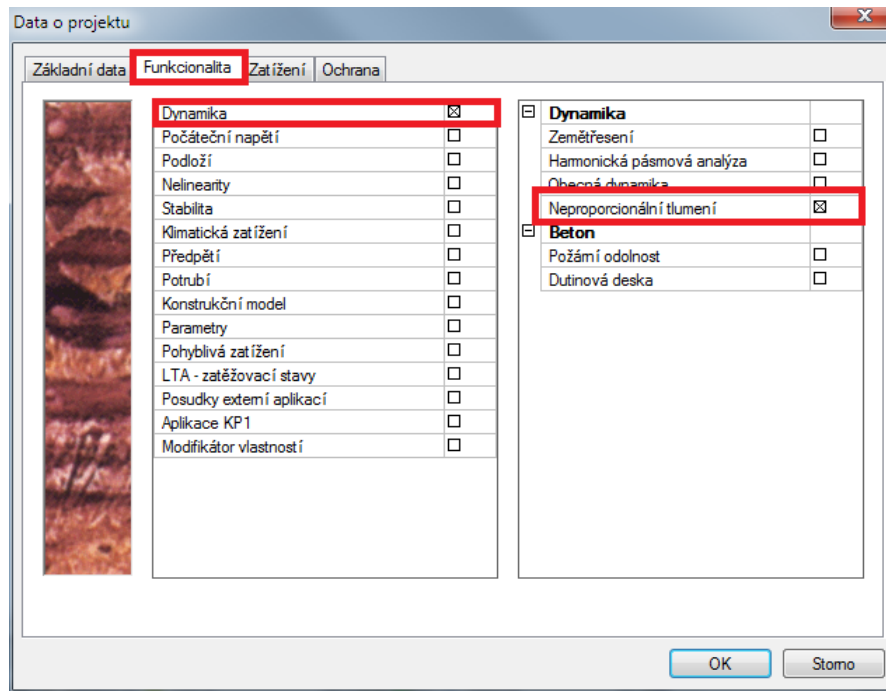
Příklad 10: Damping_1.esa

V tomto příkladu ukážeme princip tlumení váženého podle tuhosti. Vytvoříme model betonového rámu s tuhým nosníkem. V tomto případě se ve vodorovné tuhosti rámu projeví pouze sloupy. Levý sloup má **čtvercový** průřez **500 x 500** a pravý sloup **čtvercový** průřez **350 x 350**. Paty sloupů jsou modelovány jako vetknuté. Abychom namodelovali tuhý nosník, zvolíme **čtvercový** průřez **500 000 x 500 000**. Aby se tento nosník choval jako tuhý, jsou v uzlech mezi sloupy a nosníkem zadány podpory, které zabraňují **posunu Z** a **pootočení Ry**. Výška sloupů i délka nosníku je **5 m**. Všechny prvky jsou zhotoveny z **C30/37** podle **EC-EN**.

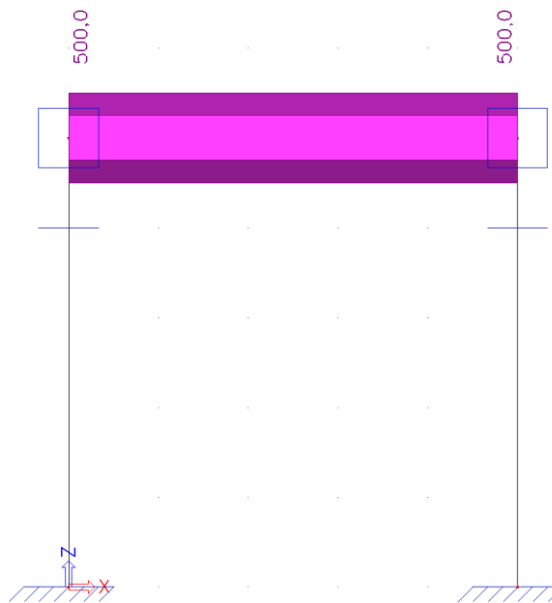


Nosník je zatížen liniovou hmotou **500 kg/m**. Levý sloup má koeficient tlumení **12 %**, pravý pak **3 %**. Je vytvořen jeden statický zatěžovací stav: **vlastní tíha** nosníku. Abychom však při dynamickém výpočtu zanedbali vlastní tíhu, můžeme v knihovně materiálů nastavit objemovou hmotnost pro **C30/37** na **1e-10 kg/m³**. Tuto malou hodnotu jsme zvolili proto, abychom zabránili jakémukoli vlivu tuhého nosníku. Postupujeme podle kroků pro výpočet vlastního kmitání, které pak rozšíříme o zadání tlumení.

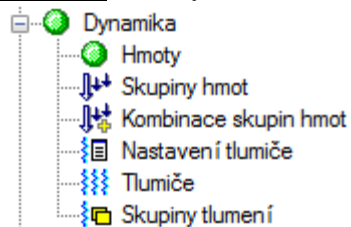
Krok 1: Prvním krokem v dynamickém výpočtu je aktivace funkcionality **Dynamika** a **Neproporcionální tlumení** na záložce **Funkcionalita** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**.



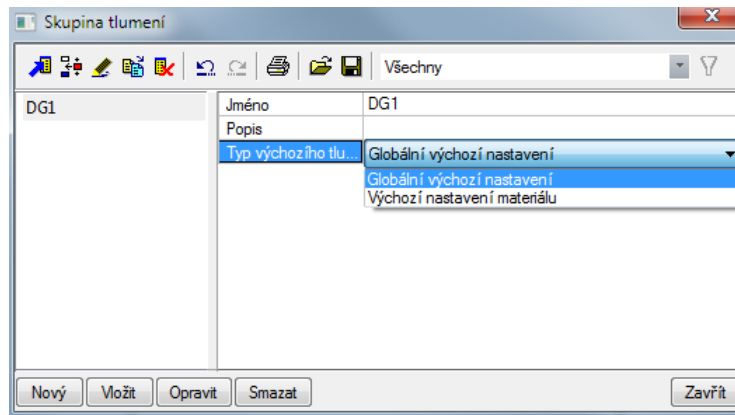
Kroky 2 a 3: Vytvoříme skupinu hmot a pak můžeme zadat hmotu **500 kg/m** na tuhý nosník.



Krok 4a: Před vytvořením kombinace skupin hmot zadáme tlumiče.



Nejprve vytvoříme skupinu tlumení.

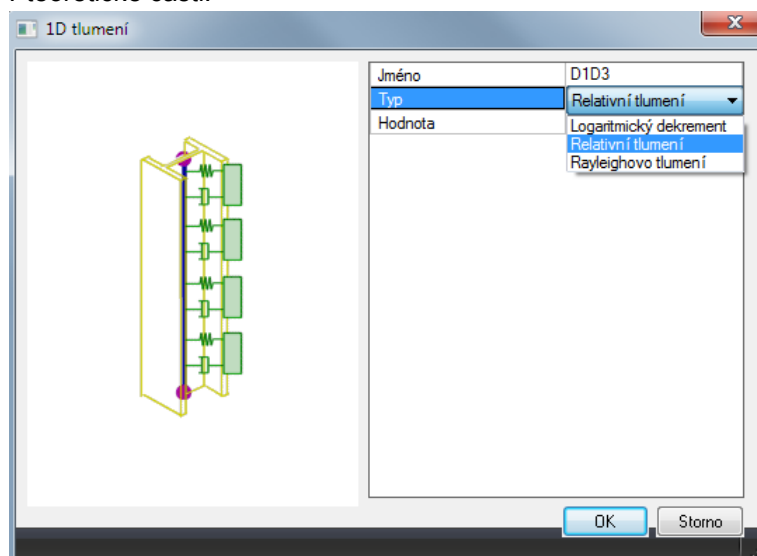


Jak bylo uvedeno v teoretické části, na každém prvku musíme zadat koeficient tlumení. Pokud nedefinujeme žádný tlumič, bude uvažována výchozí hodnota. Ve vlastnostech **skupiny tlumení** můžeme toto výchozí nastavení nastavit jako:

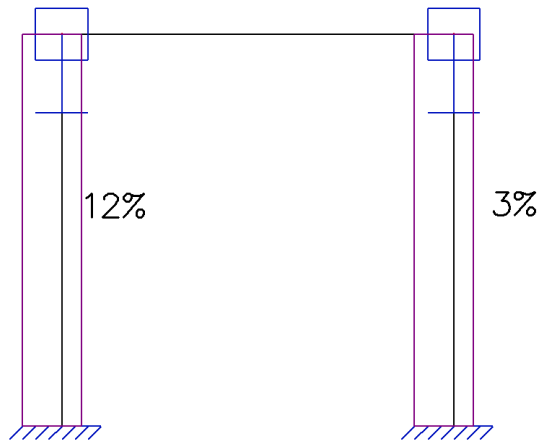
- *Globální výchozí nastavení:* Použije se logaritmický dekrement uvedený v **nastavení tlumiče**.
- *Materiálové výchozí nastavení:* Použije se logaritmický dekrement materiálu.

V našem příkladu zvolíme *globální výchozí nastavení*.

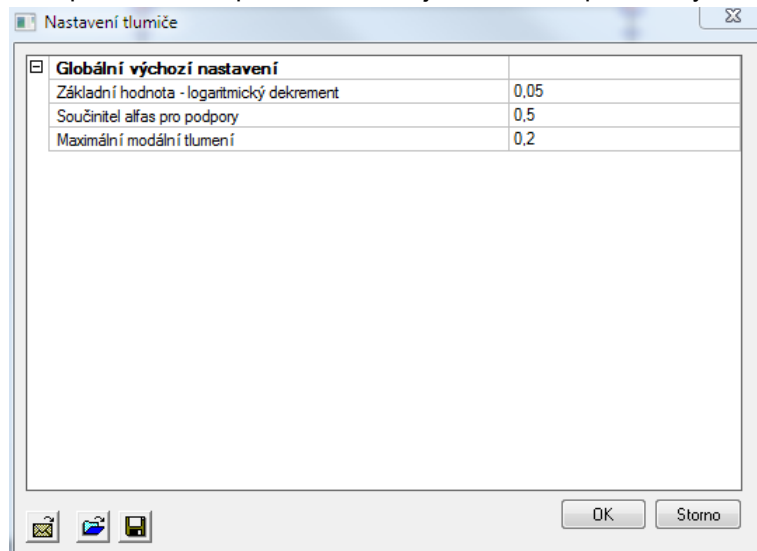
Po vytvoření **skupiny tlumení** můžeme zadat **tlumiče**. V našem příkladu zadáme **1D tlumení** na sloupech. Tlumení lze zadat následujícími způsoby, které byly vysvětleny v teoretické části.



Na levém sloupu zadáme **relativní tlumení 0,12** a na pravém sloupu **relativní tlumení 0,03**.



Jako poslední krok potom zkontrolujeme obecné parametry v dialogu **Nastavení tlumiče**.

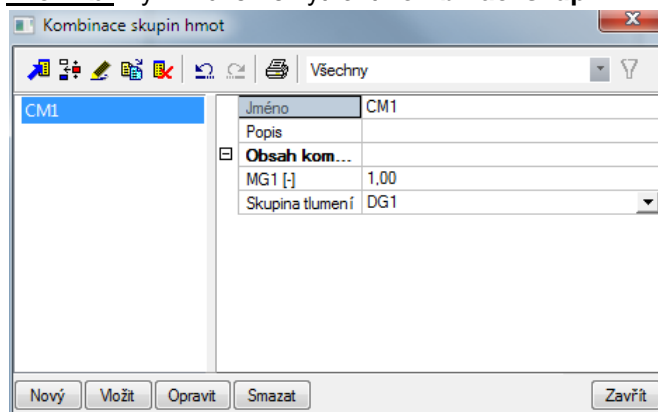


Základní hodnota určuje výchozí hodnotu, pokud je u skupiny tlumení vybrán typ globální výchozí nastavení a pokud není zadán na prvku žádný tlumič.

Součinitel Alfa se použije při výpočtu tlumení pro podpory v souladu s tím, jak bylo vysvětleno v teoretické části.

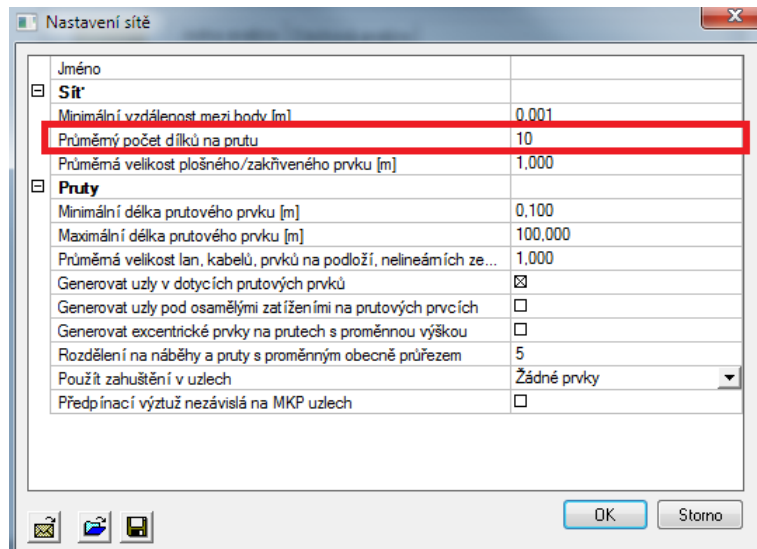
Když je vypočten smíšený modální koeficient tlumení, jeho hodnota se porovná s hodnotou *Maximálního modálního tlumení* zadaného v tomto dialogu. Pokud je vypočtená hodnota větší než maximální hodnota, použije se maximální hodnota. V našem příkladu je maximální hodnota nastavena na **0,2** v souladu s poznámkou u rovnice (5.17).

Krok 4b: Nyní můžeme vytvořit **kombinaci skupin hmot** a zadat **skupinu tlumení**.



Krok 5: Pro získání přesných dynamických výpočtů zjeme síť konečných prvků.

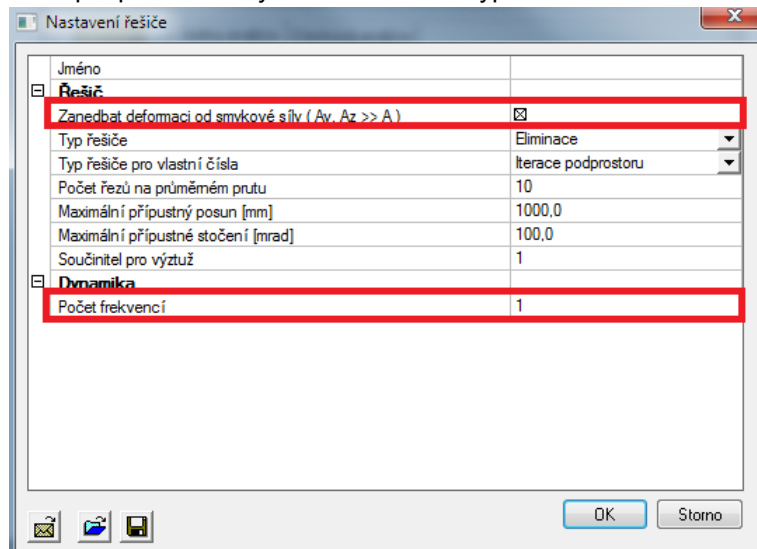
To lze nastavit v dialogu **Výpočet, síť** > **Nastavení sítě**.



Průměrný počet prvků na jeden prut nastavíme na 10.

Krok 6: Posledním krokem před spuštěním výpočtu je nastavení počtu počítaných vlastních tvarů. Pro náš příklad potřebujeme pouze jeden vlastní tvar a proto v dialogu **Výpočet, síť** > **Nastavení řešiče** zadáme počet frekvencí roven 1.

Pro lepší porovnání výsledků s ručním výpočtem zanedbáme deformaci od smykové síly.



Krok 7: Tím jsme provedli všechny kroky a můžeme spustit **Výpočet vlastního kmitání** funkcí **Výpočet, síť** > **Výpočet**.

Následující výsledky byly získány z **protokolu o výpočtu vlastních frekvencí**:

Suma hmot

[kg]	X	Y	Z
Kombinace skupin hmot 1	2500.00	0.00	2250.00

Souč. participace tvaru

Režim	Omega	Perioda	Frek. [Hz]	Wxi / Wxtot	Wyi / Wytot	Wzi / Wztot	Poměr tlumení
1	90.4678	0.0695	14.3984	1.0000	0.0000	0.0000	0.1026
				1.0000	0.0000	0.0000	

Vypočtený modální koeficient tlumení je **0,1026** neboli **10,26 %**.

Ruční výpočet

Pro kontrolu výsledků spočtených programem provedeme ruční výpočet.

Nejprve zkontrolujeme vlastní frekvenci pomocí rovnice (2.3).

V našem příkladu považujeme oba sloupy za nosníky vetknuté na obou koncích. Použijeme inženýrské tabulky [12] a najdeme, že každý sloup přispívá do rámu následující tuhostí:

$$k = \frac{12EI}{L^3} \quad (5.19)$$

Kde: Sloup 1: $E = 32\,000\text{ N/mm}^2$
 $I = 5208300000\text{ mm}^4$
 $L = 5\,000\text{ mm}$

Sloup 2: $E = 32\,000\text{ N/mm}^2$
 $I = 1250500000\text{ mm}^4$
 $L = 5\,000\text{ mm}$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{12 \cdot 32000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 5208300000 \text{mm}^4}{(5000 \text{mm})^3} = 15999,8976 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{12 \cdot 32000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1250500000 \text{mm}^4}{(5000 \text{mm})^3} = 3841,536 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Oba sloupy působí rovnoběžně a každý se přemístí o stejnou hodnotu, protože nosník je tuhý. Nosník sám se neprohýbá a tak do tuhosti nijak nepřispívá.

$$\Rightarrow k_{tot} = k_1 + k_2 = 15999,8976 \frac{\text{N}}{\text{mm}} + 3841,536 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 19841,4336 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Kmitající hmotu vypočteme takto:

$$500 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 5 \text{m} = 2500 \text{kg}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19841433,6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{2500 \text{kg}}} = 89,087 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \mathbf{14,1787\text{ Hz}}$$

Tyto výsledky přesně odpovídají hodnotám vypočteným programem.

V dalším kroku vypočteme koeficient tlumení pro tlumení vážené podle tuhosti. První sloup má koeficient tlumení **12 %**, druhý **3 %**.

Použitím principu pružné energie z rovnice (5.16) vypočteme modální koeficient tlumení jako:

$$\xi = \frac{\xi_1 \cdot k_1 + \xi_2 \cdot k_2}{k_{tot}} = \frac{0,12 \cdot 15999,8976 \frac{N}{mm} + 0,03 \cdot 3841,536 \frac{N}{mm}}{19841,4336 \frac{N}{mm}}$$

$$= 0,1026 = \mathbf{10,26\%}$$

Tento výsledek přesně odpovídá hodnotě vypočtené programem.

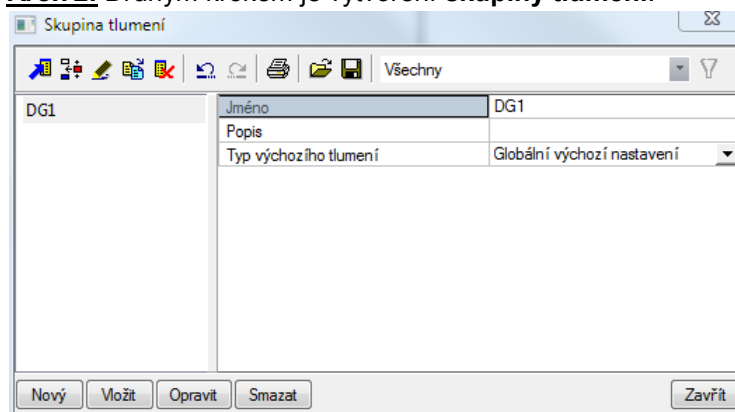
Modální koeficient tlumení lze nyní použít pro výpočet součinitele tlumení v seizmickém výpočtu. To bude ilustrováno v dalším příkladu.

Příklad 11: Damping_2.esa

V tomto příkladu bude zohledněno neproporcionální tlumení v seizmickém výpočtu s použitím metody modální kombinace SRSS. Pro tento účel je příklad **Spectral Analysis_2.esa** z předchozí kapitoly rozšířen o tlumiče. Přesněji řečeno, na tři sloupy je zadáno relativní tlumení **12 %**, **3 %** a **8 %** počínaje od základny konstrukce.

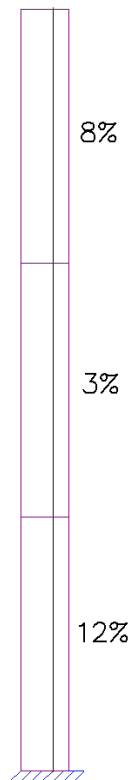
Krok 1: Prvním krokem je zohlednění tlumení aktivací funkcionality **Neproporcionální tlumení** na záložce **Funkcionalita** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**.

Krok 2: Druhým krokem je vytvoření **skupiny tlumení**.

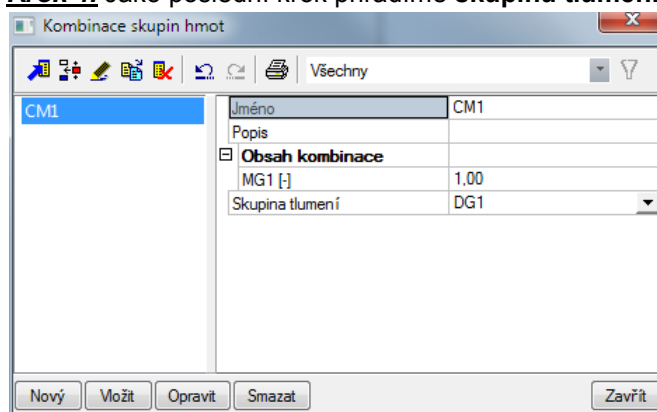


Protože tlumiče budou zadány na všechny prvky, není zvolení výchozího typu tlumení důležité.

Krok 3: Po vytvoření **skupiny tlumení** můžeme zadat **tlumiče**. Na tři sloupy je zadáno relativní tlumení **12 %**, **3 %** a **8 %** počínaje od základny konstrukce.



Krok 4: Jako poslední krok přiřadíme skupinu tlumení kombinaci hmot:



Neproporcionální tlumení bylo zadáno a tak můžeme zopakovat **lineární výpočet**, kterým obdržíme seizmické výsledky.

Následující výsledky byly získány z **protokolu o výpočtu pro lineární výpočet**:

Dynamický zatěžovací stav: 2 : LC2

Režim	Frek. [Hz]	Poměr tlumení	Souč. tlumení	Sax [m/s ²]	Say [m/s ²]	Saz [m/s ²]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.5253	0.0996	0.8176	0.1651	0.0000	0.0000	0.5003	0.1800	0.0000	0.0000	-1.7994
2	3.4249	0.0711	0.9085	0.3979	0.0000	0.0000	0.0155	0.1288	0.0000	0.0000	-0.3716
Úroveň=	0.00							0.22	0.00	0.00	1.84

Pro oba vlastní tvary se vypočte smíšený modální **koeficient tlumení** pomocí rovnice (5.17). Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, tento koeficient tlumení lze použít k výpočtu **součinitele tlumení**, který ovlivňuje spektrální zrychlení. Použijeme rovnici (4.13):

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{10}{(5 + 9,96)}} = 0,817$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{10}{(5 + 7,11)}} = 0,908$$

Protože jsou podle očekávání modální koeficienty tlumení vyšší než výchozí hodnota 5 % použitá ve spektru zrychlení, budou mít pozitivní účinek a tím sníží odezvu konstrukce. Přesněji řečeno, pro první vlastní tvar bude zohledněno pouze **81,7 %** spektrálního zrychlení a pro druhý vlastní tvar to bude **90,8 %**.

Spektrální zrychlení z původního příkladu bez tlumení tak mohou být vynásobena součinitelem η :

$$\Rightarrow S_{ax,(1)} = 0,2019 \frac{m}{s^2} \cdot 0,8176 = 0,1651 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow S_{ax,(2)} = 0,4380 \frac{m}{s^2} \cdot 0,9087 = 0,3980 \frac{m}{s^2}$$

Tato upravená spektrální zrychlení ovlivní modální součinitele, základní smyk, moment převrácení, uzlová přemístění a zrychlení atd.

Příklad 12: Damping_3.esa

V tomto příkladu bude zohledněno neproporcionální tlumení v seizmickém výpočtu s použitím metody modální kombinace CQC. Pro tento účel je příklad **Spectral Analysis_3.esa** z předchozí kapitoly rozšířen o tlumiče.

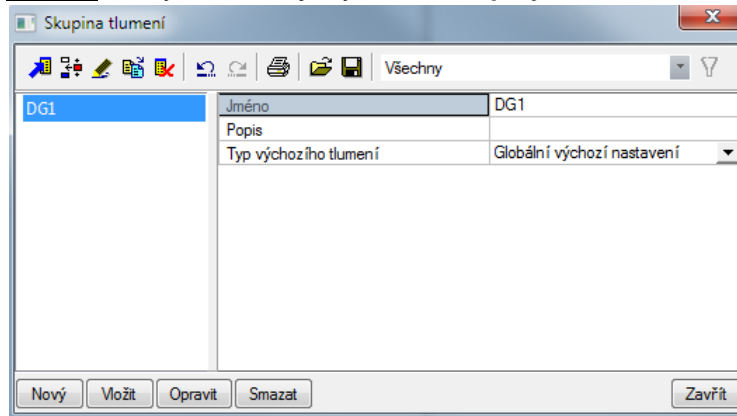
Přesněji řečeno, na tři sloupy je zadáno relativní tlumení **2%, 5% a 2%** počínaje od základny konstrukce.

Jak bylo ukázáno v teoretické části a v původním příkladu, metoda CQC vyžaduje definici **spektra tlumení**. Toto spektrum tlumení bylo použito pro výpočet **modálních vzájemných korelačních koeficientů** a pro výpočet **součinitelů tlumení** pro každý vlastní tvar.

Pokud však použijeme neproporcionální tlumení, použijí se vypočtené smíšené modální koeficienty tlumení **namísto** dat ze spektra tlumení. Toto je prakticky ilustrováno na tomto příkladu.

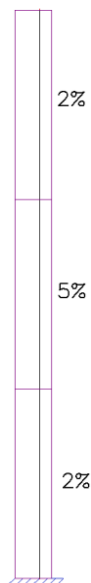
Krok 1: Prvním krokem je zohlednění tlumení aktivací funkcionality **Neproporcionální tlumení** na záložce **Funkcionalita** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**.

Krok 2: Druhým krokem je vytvoření **skupiny tlumení**.

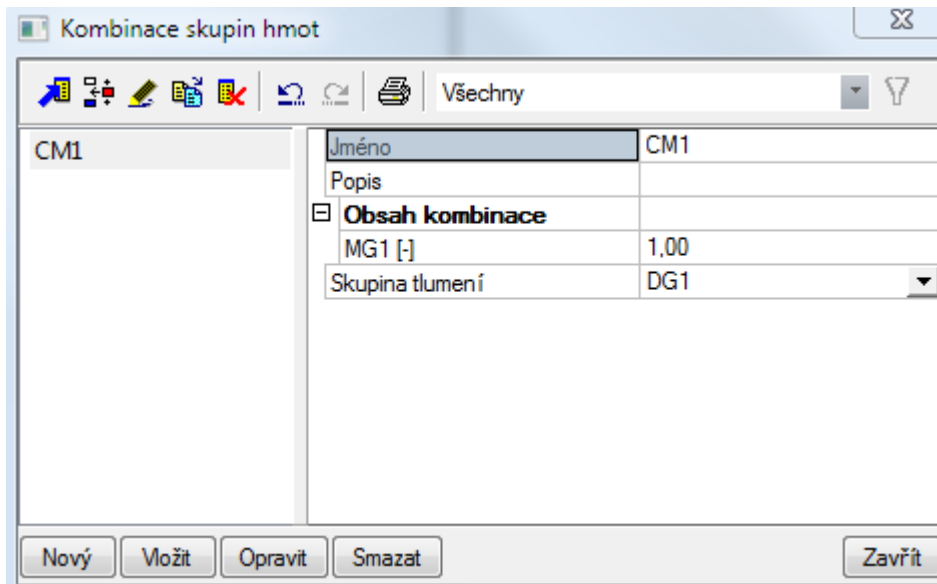


Protože tlumiče budou zadány na všechny prvky, není zvolení výchozího typu tlumení podstatné.

Krok 3: Po vytvoření **skupiny tlumení** můžeme zadat **tlumiče**. Na tři sloupy je zadáno relativní tlumení **2%, 5% a 2%** počínaje od základny konstrukce.



Krok 4: Jako poslední krok přiřadíme **skupinu tlumení** do **kombinace hmot**:



Neproporcionální tlumení bylo zadáno a tak můžeme zopakovat **lineární výpočet**, abychom tak získali seizmické výsledky.

Následující výsledky byly získány z **protokolu o výpočtu pro lineární výpočet**:

Dynamický zatěžovací stav: 2 : LC2

Režim	Frek. [Hz]	Poměr tlumení	Souč. tlumení	Sax [m/s ²]	Say [m/s ²]	Saz [m/s ²]	G(j)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kNm]	My [kNm]
1	0.5253	0.0265	1.1432	0.2308	0.0000	0.0000	0.6995	0.2517	0.0000	0.0000	-2.5160
2	3.4249	0.0330	1.0980	0.4809	0.0000	0.0000	0.0187	0.1556	0.0000	0.0000	-0.4491
Úroveň=	0.00							0.30	0.00	0.00	2.56

V původním příkladu bylo použito spektrum tlumení s konstantním koeficientem tlumení **2 %**. Kvůli zadaným tlumičům jsou nyní použity vypočtené smíšené modální koeficienty tlumení **2,65 % a 3,30 %**.

Součinitele tlumení můžeme vypočítat pomocí rovnice (4.13):

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{10}{(5 + 2,65)}} = 1,1432$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{10}{(5 + 3,30)}} = 1,0980$$

Stejně jako v původním příkladu jsou modální koeficienty tlumení nižší než výchozí hodnota 5 % použitá ve spektru zrychlení a proto budou mít negativní účinek a tím zvýší odezvu konstrukce.

Protože vypočtené koeficienty tlumení jsou vyšší než původní 2 %, bude odezva v porovnání s původním příkladem slabší.

Zadruhé, vypočtené smíšené modální koeficienty tlumení budou použity pro výpočet **modálních vzájemných korelačních koeficientů** metody **CQC**.

To bude ilustrováno ručním výpočtem.

Ruční výpočet

V tomto odstavci bude ilustrováno použití metody **CQC** pro výpočet globální odezvy základního smyku s použitím vypočtených modálních vzájemných korelačních koeficientů.

Tvar 1: $\omega_{(1)} = 3,3007 \text{ rad/s}$ $F_{(1)} = 0,2701 \text{ kN}$

Tvar 2: $\omega_{(2)} = 21,5192 \text{ rad/s}$ $F_{(2)} = 0,1629 \text{ kN}$

V tabulkovém procesoru vypočteme modální vzájemné korelační koeficienty $\rho_{i,j}$ pro koeficient tlumení $\xi_{i,j} = 2,65 \%$ pro první vlastní tvar a $3,30 \%$ pro druhý vlastní tvar.

Tvar	1	2
1	1	0,00055202
2	0,00055202	1

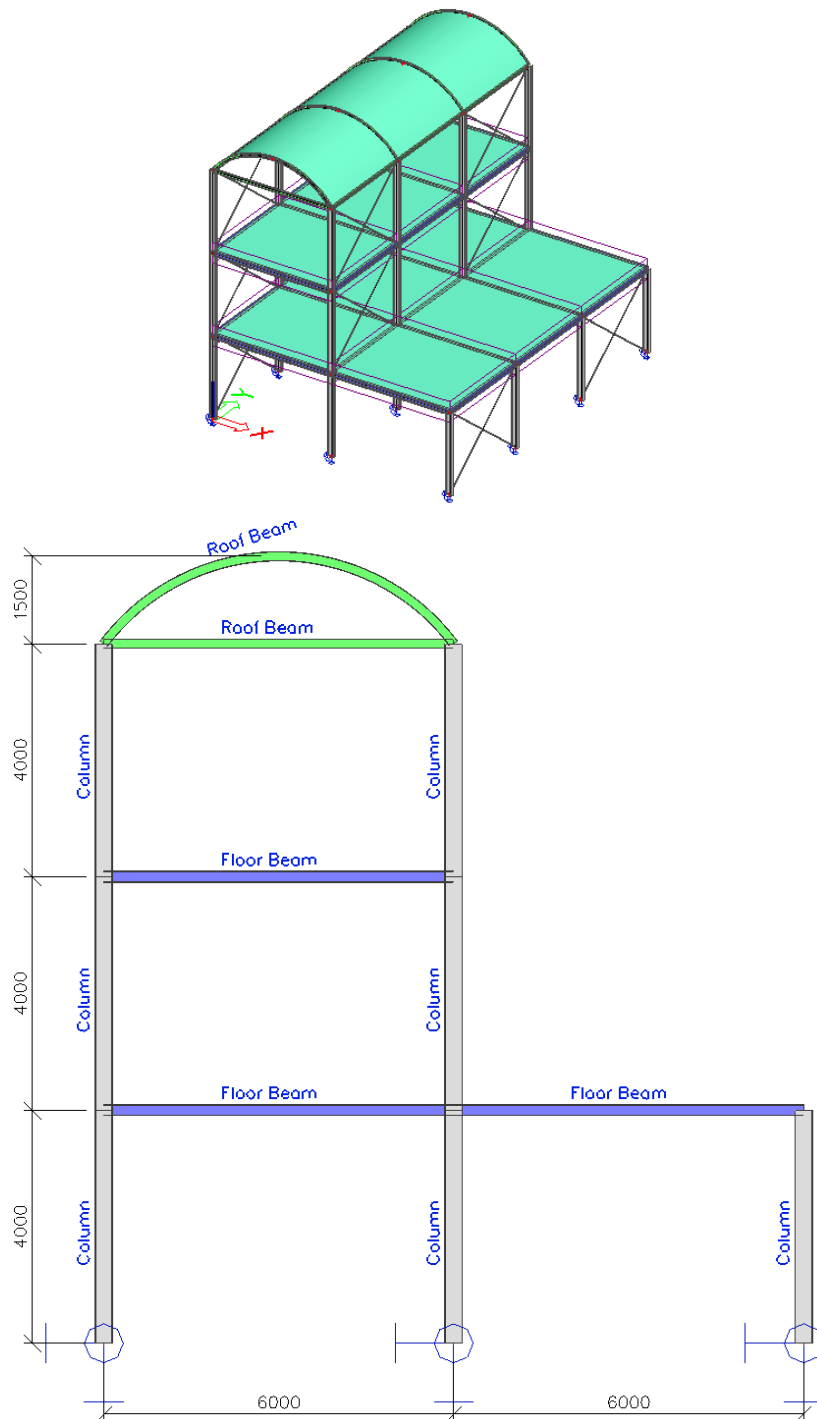
$$\begin{aligned}
 R_{tot} &= \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{(i)} \cdot \rho_{i,j} \cdot R_{(j)}} \\
 &= \sqrt{0,2701kN \cdot 1 \cdot 0,2701kN + 0,2701kN \cdot 0,00055202 \cdot 0,1629kN} \\
 &\quad + 0,1629kN \cdot 0,00055202 \cdot 0,2701kN + 0,1629kN \cdot 1 \cdot 0,1875kN} \\
 &= 0,315kN
 \end{aligned}$$

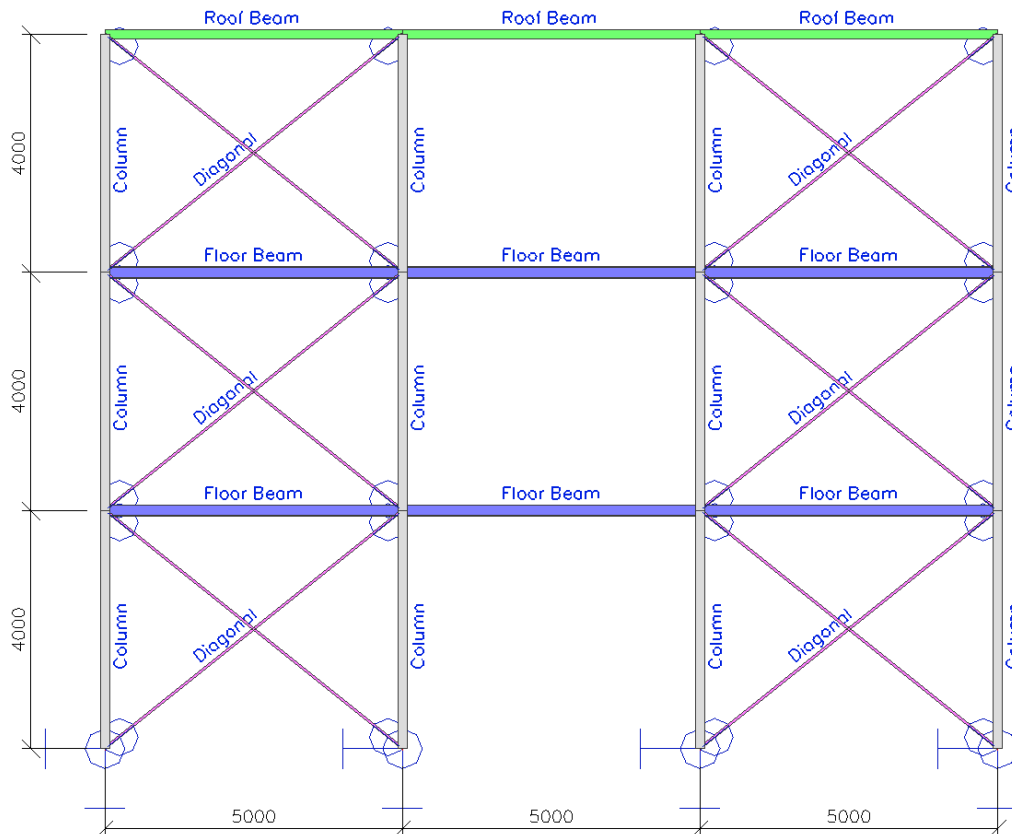
Rozdíl mezi těmito a původními korelačními koeficienty je velmi malý, což je očekávaný výsledek, protože vypočtené koeficienty tlumení jsou blízké původním 2 %.

Příklad 13: Damping_4.esa

V tomto příkladu provedeme seizmickou analýzu skladiště. Tvar konstrukce je ukázán na následujícím obrázku. Skladiště je postaveno z ocelových prvků z materiálu **S235** podle **EC-EN**. Horní střecha je tvořena ocelovou skořepinou o tloušťce **20 mm**.

V každém podlaží je podlaha z betonové desky o tloušťce **200 mm**. Desky jsou vyrobeny z betonu **C25/C30** podle **EC-EN**.





Diagonály jsou **kloubové** v obou směrech. Paty sloupů jsou uloženy rovněž **kloubově**, ale kotvy jsou rozmístěny tak, že pootočení kolem **osy Z** je **bráněno**.

Jednotlivé ocelové prvky skladiště mají tyto průřezy:

- Sloupy: **IPE 300**
- Podlahové nosníky: **HEA 200**
- Střešní nosníky: **IPE 160**
- Diagonály: **L(ARC) 40x40x4**

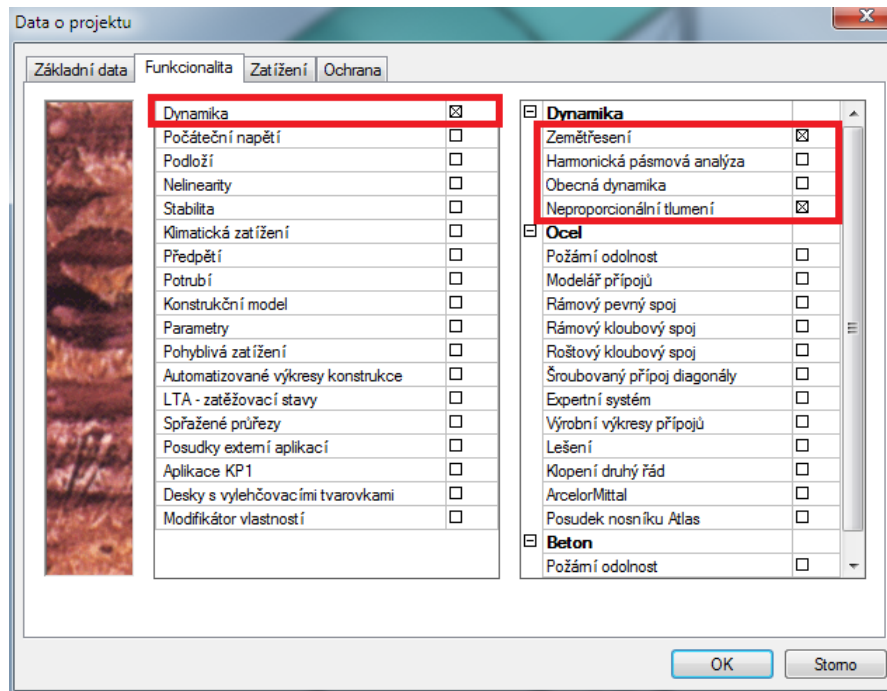
Svislé zatížení působící na konstrukci je:

- Zatěžovací stav 1: **vlastní tíha** skladiště.
- Zatěžovací stav 2: Užité zatížení třídy E (skladiště) **5 kN/m²** na všech stropních deskách.

Konstrukce je vystavena vodorovnému zemětřesení ve směru **X** i **Y** s využitím návrhového spektra odezvy podle Eurocode 8 pro typ podloží **A** se součinitelem chování daným hodnotou **2**. Součinitel zrychlení je **0,50**.

Pro dynamický výpočet je zohledněno konstrukční tlumení skladiště. Přesněji řečeno, **logaritmický dekrement** pro ocel je **0,025** a pro beton **0,056** [22].

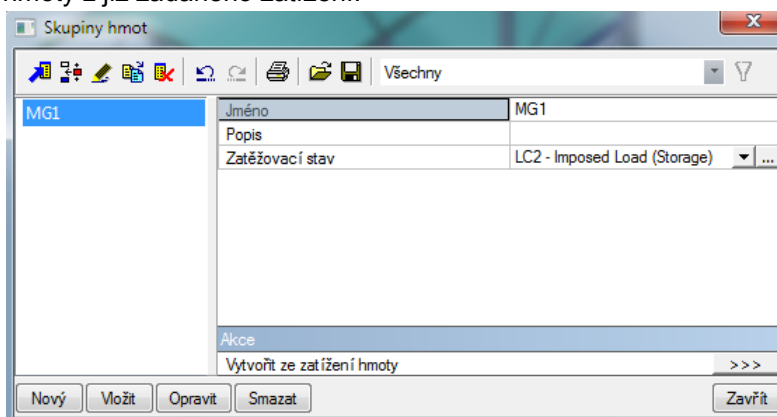
Krok 1: Prvním krokem v seizmickém výpočtu je aktivace funkcionality **Dynamika** a **Seizmicita** na záložce **Funkcionalita** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**. Abychom zohlednili také konstrukční tlumení, zapneme funkcionalitu **Neproporcionální tlumení**.



Kroky 2 a 3: Druhým krokem je vytvoření **skupin hmot**, třetím pak zadání **hmot**.

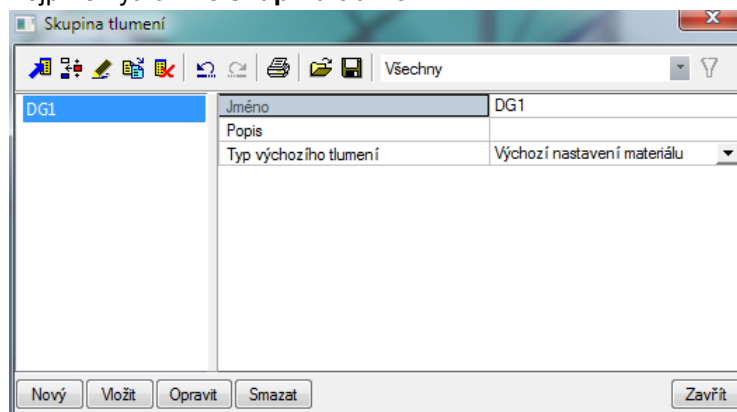
Protože vlastní tíha je v **kombinaci skupin hmot** zohledněna automaticky, vytvoříme zde pouze jednu **skupinu hmot**, která zohlední hmotu užitého zatížení.

S pomocí akčního tlačítka [Vytvořit hmoty ze zatěžovacího stavu] automaticky vygenerujeme hmoty z již zadaného zatížení.



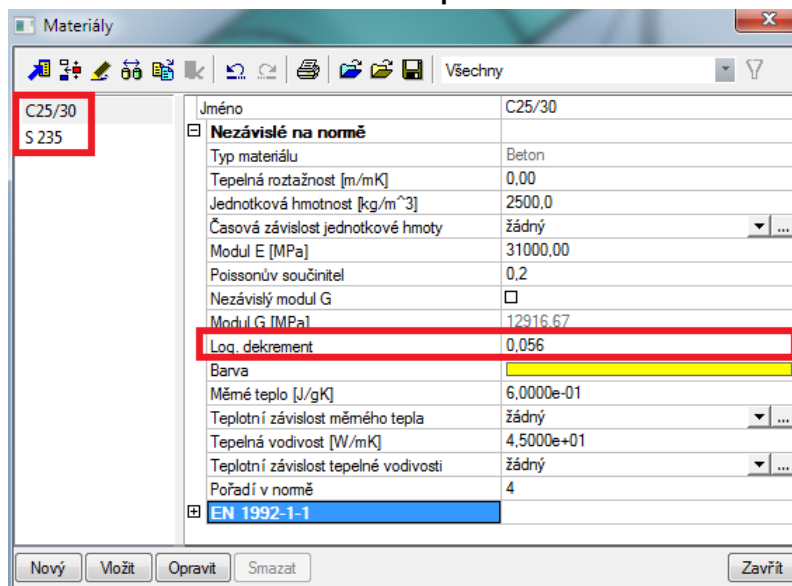
Krok 4a: Před vytvořením **kombinace skupin hmot** zadáme **tlumení**.

Nejprve vytvoříme **skupinu tlumení**.



Protože v našem příkladu je zohledněno konstrukční tlumení oceli i betonu, *typ výchozího tlumení* je nastaven na **Materiálové výchozí nastavení**. Díky tomu bude použita výchozí hodnota tlumení materiálu, protože na prvcích nejsou zadány žádné tlumiče.

Hodnotu tlumení můžeme zadat ve **správci materiálů**.



Pro beton zadáme logaritmičtý dekrement **0,056** a pro ocel **0,025**.

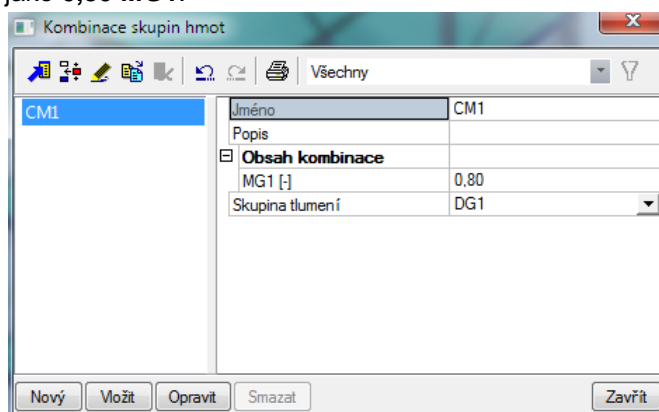
Krok 4b: Nyní můžeme do **kombinace skupin hmot** zkombinovat **skupinu hmot** a **skupinu tlumení**.

Podle (2.9) je nutno při výpočtu vlastních tvarů zohlednit veškeré gravitační zatížení objevující se v následující kombinaci zatížení:

$$\sum G_k + \sum \psi_{E,i} \cdot Q_{k,i}$$

Pro náš příklad, kde je užité zatížení **kategorie E**, uvažujeme φ hodnotou **1,0** a $\psi_{2,i}$ hodnotou **0,8**. Tím dostaneme pro $\psi_{E,i}$ hodnotu **0,8**.

Protože vlastní tíha je zohledněna automaticky, lze kombinaci skupin hmot **CM1** formulovat jako **0,80 MG1**.

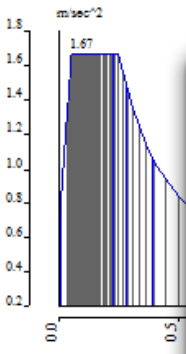


Jako poslední krok přiřadíme **skupinu tlumení** do **kombinace skupin hmot**.

Krok 5: Před vytvořením seizmického zatěžovacího stavu je nutno definovat seizmické spektrum pomocí funkce **Knihovny > Seizmická spektra**.

Místo ručního zadání spektra použijeme **systémovou databázi**, která obsahuje spektra předdefinovaná normou Eurocode 8. V našem příkladu použijeme spektrum pro podloží typu **A** a součinitel chování **q = 2** pro oba vodorovné směry:

Seismické spektrum



	rekvence[Hz]	Perioda[sec]	
1	0,00	1000,00	
2	0,25	4,00	
3	0,50	2,00	
4	0,75	1,33	
5	1,00	1,00	
6	1,25	0,80	
7	1,50	0,67	
8	1,75	0,57	
9	2,00	0,50	0,83
10	2,25	0,44	0,94
11	2,50	0,40	1,04
12	2,75	0,36	1,15

Normové parametry

souč. zrychlení ag	0,102
ag - návrhové zrychlení [m/sec^2]	1,000
q - součinitel duktility	1,500
beta	0,200
S, Tb, Tc, Td ručně?	Ne
Typ podloží	A
Typ spektra	typ 2
Směr	Vodorovně
S - koeficient zeminy	1,000
Tb	0,050
Tc	0,250
Td	1,200

EC8-h-f

Perioda

Eurocode

30,00 Hz

0,25 Hz

Normové parametry

OK Storno

Krok 6: Nyní lze definovat **Seismické** zatěžovací stavy pomocí funkce **Zatěžovací stavy, kombinace > Zatěžovací stavy**.

Pro seismické zatížení ve směru **X** jsou použity následující parametry:

Obecné seismické zat.

Seismické spektrum X : EC8-h-f

Seismické spektrum Y : EC8-h-f

Seismické spektrum Z : EC8-h-f

Typ vyhodnocení

SRSS

Max

CQC CQC1

Převládající mód

Výsledky se znaménkem

Vlastní tvar Výchozí

Násobení vlastních tvarů

Sjednotit tvar

Přesnost 0,00 %

směr X 1

směr Y 0

směr Z 0

souč. zrychlení 0,5

Překlopení 0

Hmota ve výpočtu

Pouze účastnická hmota

Chybějící hmota v módech

Zbytkový mód

OK Storno

Součinitel zrychlení je nastaven na **0,5**. Jako **typ vyhodnocení** je nastavena **metoda CQC**. Stejným způsobem definujeme seismický zatěžovací stav pro směr **Y**.

Obecné seismické zat.

Seismické spektrum X : EC8-h-f směr X 0

Seismické spektrum Y : EC8-h-f směr Y 1

Seismické spektrum Z : EC8-h-f směr Z 0

Typ vyhodnocení

SRSS

Max

CQC CQC1

souč. zrychlení 0,5

Překlopení 0

Převládající mód

Výsledky se znaménkem

Vlastní tvar Výchozí

Hmota ve výpočtu

Pouze účastnická hmota

Chybějící hmota v módech

Zbytkový mód

Násobení vlastních tvarů

Sjednotit tvar

Přesnost 0,00 %

OK Storno

Zatěžovací stavy

Všechny

Jméno	LC4
Popis	Seismic Yf
Typ působení	Nahodilé
Skupina zatížení	LG3
Typ zatížení	Dynamické
Specifikace	Seismické
Parametry	
Krátké info	CQC /0 X; 1 Y; 0 Z/ 0,5
Řídící zat. stav	Žádný
Kombi hmot	CM1

Nový Vložit Opravit Smazat Zavřít

Podle Eurocode 8 [7] lze počítat účinky zatížení od kombinace vodorovných složek seismického zatížení s použitím obou z následujících kombinací:

$$E_{Edx} "+" 0,30E_{Edy} \quad (5.20)$$

$$0,30E_{Edx} "+" E_{Edy} \quad (5.21)$$

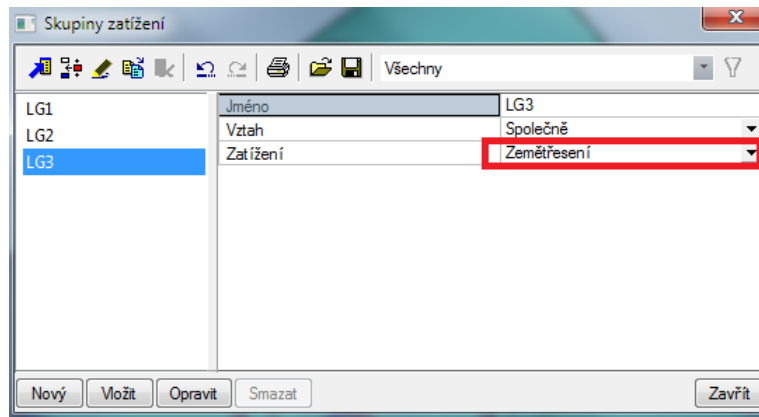
Kde:

"+" = značí „kombinovat s“.

E_{Edx} = představuje účinky zatížení od působení seismického zatížení podél zvolené vodorovné osy x konstrukce.

E_{Edy} = představuje účinky zatížení od působení seismického zatížení podél kolmé vodorovné osy y konstrukce.

To především značí, že oba zatěžovací stavy musí být v kombinaci uvažovány vždy společně. V programu Scia Engineer toho lze docílit tak, že oba seismické zatěžovací stavy jsou vloženy do **skupiny zatížení** s příznakem **společně**.



Poznámka

Typ zatížení EC1 nebude v tomto příkladu použit. V nové EC-EN je možno definovat typ zatížení jako Mimořádné.

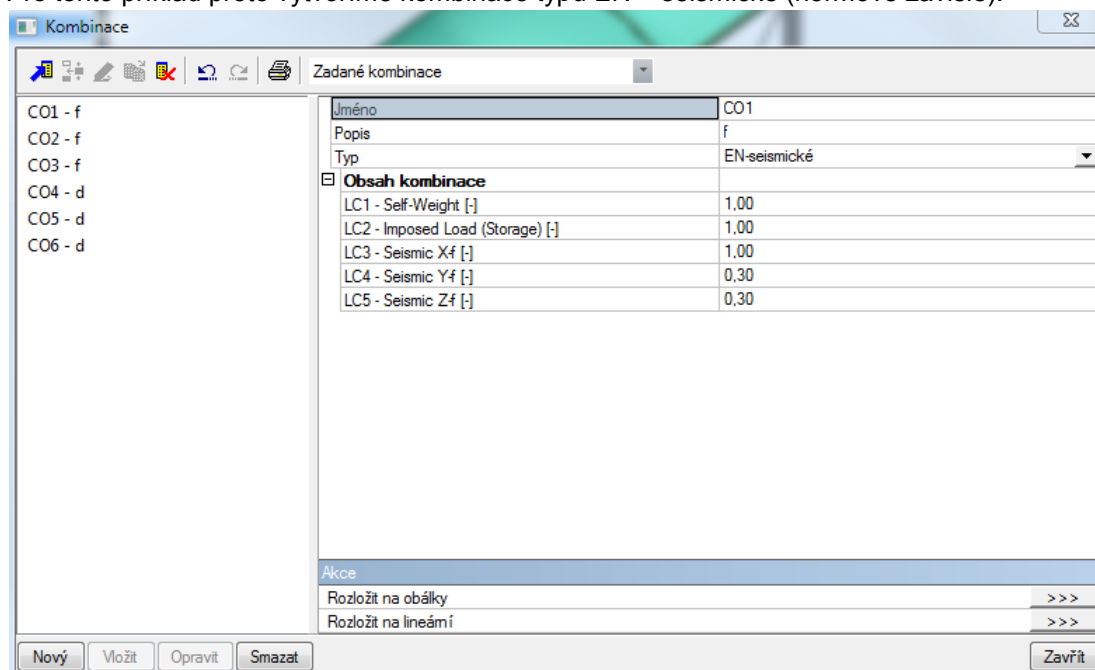
V dalším kroku zadáme kombinaci pro seizmické zatížení. Podle Eurocode 8 [7] je tato kombinace následující:

$$\sum G_k + P + A_{Ed} + \sum \psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} \quad (5.22)$$

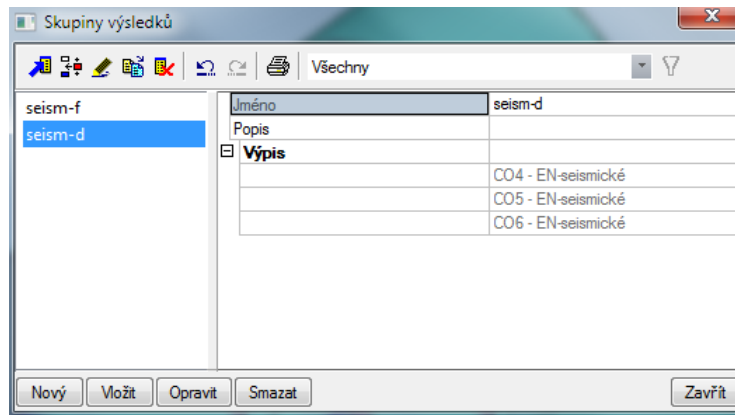
Kde A_{ed} značí náhodné zatížení, v našem případě kombinované seizmické zatížení.

V programu Scia Engineer lze pro tento účel použít kombinaci typu **Obálka – Únosnost**, protože tento typ kombinace zohlední vztah skupiny zatížení. Jak bylo uvedeno v kapitole 3, kombinace typu Obálka také vezme dynamický zatěžovací stav jednou s kladným součinitelem kombinace a jednou se záporným.

Pro tento příklad proto vytvoříme kombinace typu EN – seizmické (normově závislé):

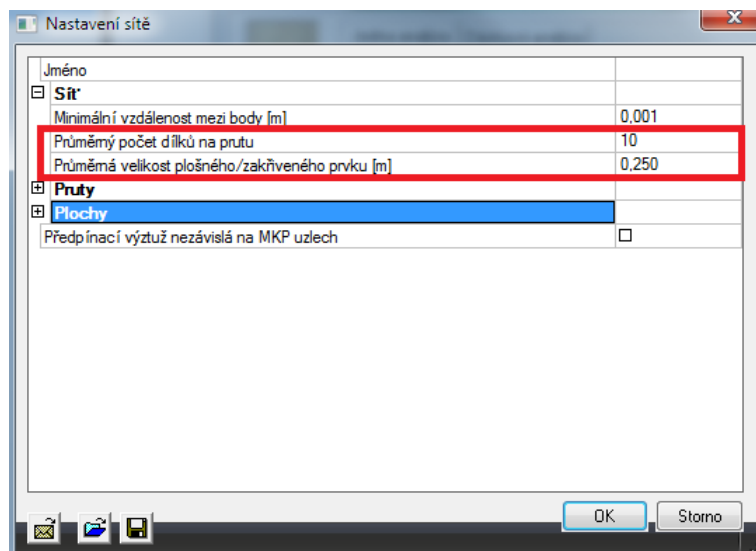


Abychom získali globální extrémy pro obě kombinace, vytvoříme **Skupinu výsledků**:



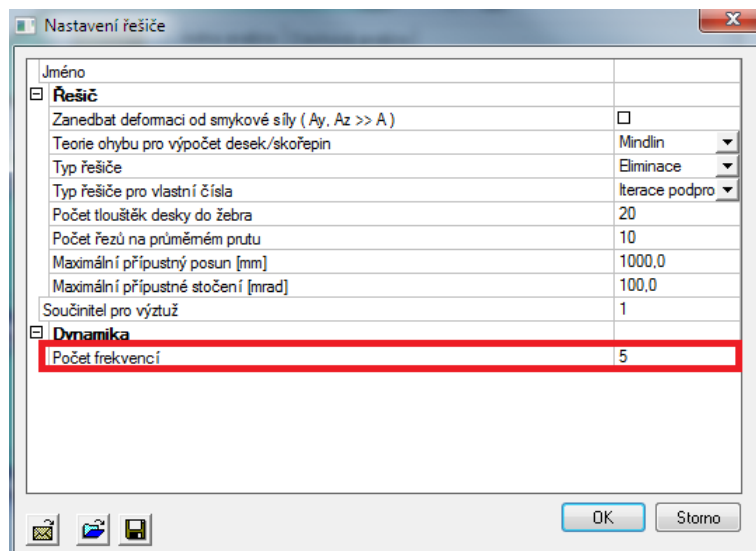
Krok 7: Abychom získali přesné výsledky, zjourníme síť konečných prvků pomocí funkce **Výpočet, síť > Nastavení sítě**.

Průměrný počet dílků na prvku 1D nastavíme na **10**; Průměrnou velikost 2D prvku nastavíme na **0,25 m**.



Krok 8: Posledním krokem před spuštěním výpočtu je nastavení počtu počítaných vlastních tvarů. V našem příkladu zvolíme pět vlastních tvarů.

Ve funkci **Výpočet, síť > Nastavení výpočtu** proto nastavíme počet frekvencí na **5**.



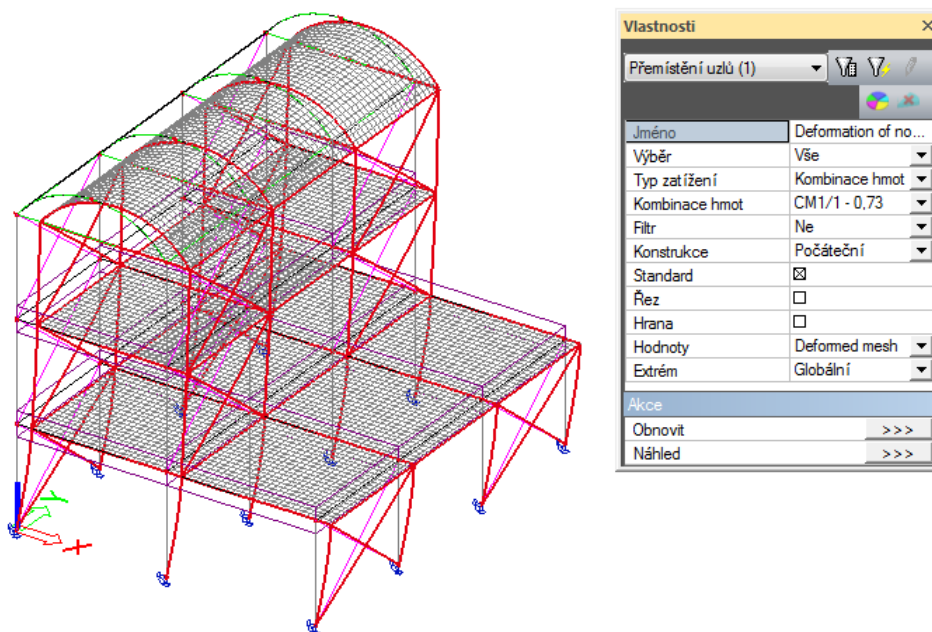
Krok 9: Tím jsme provedli všechny kroky a můžeme spustit **Lineární výpočet** funkcí **Výpočet, síť > Výpočet**.

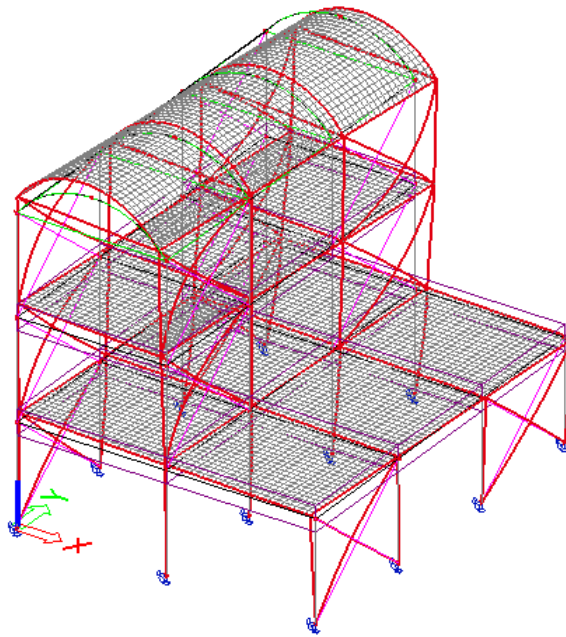
Protokol o výpočtu pro výpočet **Vlastních frekvencí** obsahuje následující údaje:

Souč. participace tvaru

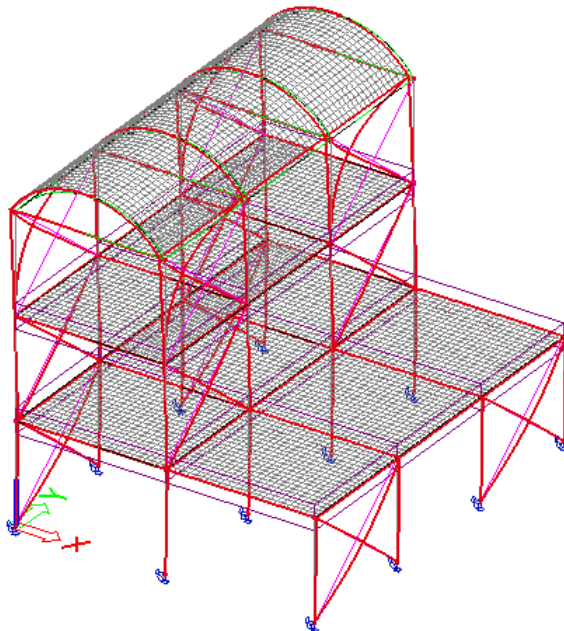
Režim	Omega	Perioda	Frek. [Hz]	Wxi / Wxtot	Wyj / Wytot	Wzi / Wztot	Poměr tlumení
1	4.6018	1.3654	0.7324	0.9888	0.0000	0.0000	0.0034
2	11.4191	0.5502	1.8174	0.0000	0.8685	0.0000	0.0057
3	13.6354	0.4808	2.1701	0.0270	0.0000	0.0002	0.0052
4	13.8212	0.4546	2.1997	0.0000	0.2707	0.0000	0.0384
5	14.9383	0.4207	2.3772	0.0000	0.0000	0.0000	0.0382
				0.9957	0.9392	0.0002	

Vidíme, že pro oba vodorovné směry je v těchto pěti vlastních tvarech zohledněno více než **90 %** celkové hmoty a z toho plyne, že bylo vypočteno dostatečné množství vlastních tvarů. Pomocí funkce **Přemístění uzlů** ve větvi **Plochy** můžeme zobrazit **Deformovanou síť** pro první čtyři vlastní tvary:

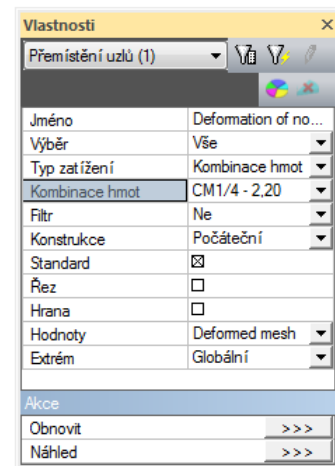
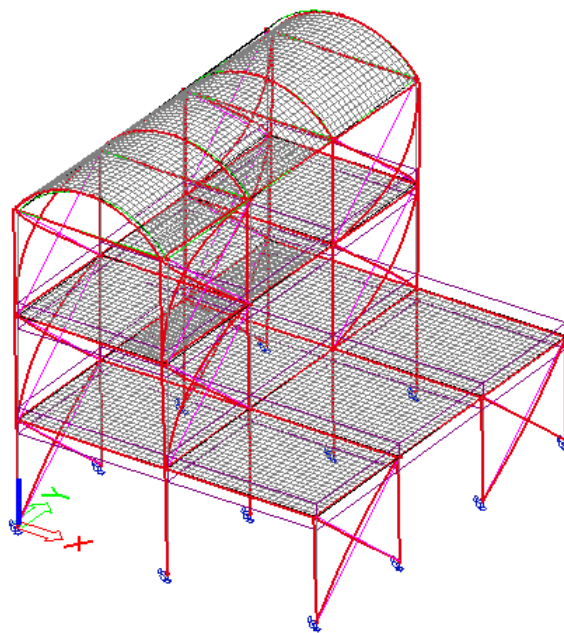




Vlastnosti	
Přemístění uzlů (1)	
Jméno	Deformation of no...
Výběr	Vše
Typ zatížení	Kombinace hmot
Kombinace hmot	CM1/2 - 1,82
Filtr	Ne
Konstrukce	Počáteční
Standard	<input checked="" type="checkbox"/>
Řez	<input type="checkbox"/>
Hrana	<input type="checkbox"/>
Hodnoty	Deformed mesh
Extrém	Globální
Akce	
Obnovit	>>>
Náhled	>>>



Vlastnosti	
Přemístění uzlů (1)	
Jméno	Deformation of no...
Výběr	Vše
Typ zatížení	Kombinace hmot
Kombinace hmot	CM1/3 - 2,17
Filtr	Ne
Konstrukce	Počáteční
Standard	<input checked="" type="checkbox"/>
Řez	<input type="checkbox"/>
Hrana	<input type="checkbox"/>
Hodnoty	Deformed mesh
Extrém	Globální
Akce	
Obnovit	>>>
Náhled	>>>



Protokol o výpočtu pro Lineární výpočet obsahuje výsledky seizmického výpočtu:

Dynamický zatěžovací stav: 3 : LC3

Režim	Frek. [Hz]	Poměr tlumení	Souč. tlumení	Sax [m/s ²]	Say [m/s ²]	Saz [m/s ²]	G (J)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kN m]	My [kN m]
1	0.7324	0.0034	1.3683	0.1890	0.0000	0.0000	4.5975	50.1569	0.0000	-0.0000	-315.5871
2	1.8174	0.0057	1.3397	0.5078	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
3	2.1701	0.0052	1.3457	0.6088	0.0000	0.0000	0.2815	4.4982	-0.0010	0.0048	43.6442
4	2.1997	0.0384	1.0634	0.4876	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0022	0.0127	0.0000
5	2.3772	0.0362	1.0774	0.5338	0.0000	0.0000	-0.0015	0.0002	-0.0010	0.0052	0.0007
Úroveň=	0.00							50.36	0.00	0.02	318.59

Dynamický zatěžovací stav: 4 : LC4

Režim	Frek. [Hz]	Poměr tlumení	Souč. tlumení	Sax [m/s ²]	Say [m/s ²]	Saz [m/s ²]	G (J)	Fx [kN]	Fy [kN]	Mx [kN m]	My [kN m]
1	0.7324	0.0034	1.3683	0.0000	0.1890	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
2	1.8174	0.0057	1.3397	0.0000	0.5078	0.0000	1.6664	0.0000	92.9906	-621.5304	0.0000
3	2.1701	0.0052	1.3457	0.0000	0.6088	0.0000	-0.0001	-0.0010	0.0000	-0.0000	-0.0095
4	2.1997	0.0384	1.0634	0.0000	0.4876	0.0000	-0.6952	-0.0022	36.1649	-206.2595	-0.0267
5	2.3772	0.0362	1.0774	0.0000	0.5338	0.0000	0.0075	-0.0010	0.0053	-0.0269	-0.0033
Úroveň=	0.00							0.00	100.99	661.92	0.03

Pro každý vlastní tvar můžeme vypočítat **smíšený koeficient tlumení** s pomocí konstrukčního tlumení oceli a betonu.

Skupinu výsledků nyní použijeme k posouzení konstrukčních prvků.

6. Vortex Shedding: Kármánovo kmitání

V této poslední kapitole prozkoumáme příčné kmitání válcových konstrukcí od větru. Nejprve vysvětlíme teorii, ve které odkážeme na harmonické kmitání, protože Kármánovo kmitání je zvláštním případem harmonického zatížení.

Teorii pak přiblížíme na příkladu ocelového komína. Získané výsledky opět ověříme ručním výpočtem.

6.1 Teorie

Jedním z nejdůležitějších mechanismů pro větrem vyvolané kmitání je tvoření vírů (koncentrace rotujících částic proudícího média) těsně za určitými typy konstrukcí jako komíny, věže, zavěšená potrubí apod.

Při určité (kritické) rychlosti větru nesledují proudnice obrys tělesa, ale v jistém bodě se rozbijí a vytvoří se tak vír [27].

Tyto víry vznikají střídavě na opačných stranách konstrukce a dávají tak vzniknout zatížení kolmému na směr větru. Následující obrázek ukazuje střídavé rozložení vírů pro proudění kolem kruhového válce. Danému jevu se často říká Kármánovo kmitání [2]:



Dojde-li na jedné straně konstrukce ke vzniku víru, na druhé straně se zvýší rychlost větru. To vede k rozdílu tlaku na opačných stranách a konstrukce je tak vystavena příčné síle směřující od té strany, kde vír vznikl. Protože víry jsou při kritické rychlosti větru rozmístěny střídavě od jedné strany ke druhé, dojde ke vzniku harmonického příčného zatížení, jehož frekvence je shodná s frekvencí tvoření vystřídáných vírů [23].

Frekvence Kármánova kmitání f_v je dána vztahem:

$$f_v = \frac{S \cdot v}{d} \quad (6.1)$$

Kde: S = bezrozměrná konstanta označovaná jako *Strouhalovo číslo* Pro válec se uvažuje hodnotou **0,2**.

d = šířka tělesa zatíženého větrem [m]. Pro válec se to rovná vnějšímu poloměru.

v = střední rychlost proudění větru [m/s]

Způsob, jakým vznikají víry, je funkcí Reynoldsova čísla **Re**, které je dáno vztahem [24]:

$$Re = 0,687 \cdot v \cdot d \cdot 10^5 \quad (6.2)$$

Obecně platí, že velká Reynoldsova čísla znamenají turbulentní proudění. Reynoldsovo číslo charakterizuje tři hlavní oblasti:

podkritickou $300 \leq Re \leq 10^5$

nadkritickou $10^5 \leq Re \leq 3,5 \cdot 10^6$

transkritickou $3,5 \cdot 10^6 \leq Re$

U komínů kruhového průřezu je proudění pro praktické rychlosti větru buď nadkritické nebo transkritické.

Pokud se frekvence Kármánova kmitání shoduje s vlastní frekvencí konstrukce (rezonance), jsou výsledkem velmi velké amplitudy ve směru příčném na směr větru. To samozřejmě za

předpokladu, že není instalováno nějaké efektivní tlumení. Tento princip byl již probrán v kapitole 3.

V našem případě lze přepsat rovnici (6.1) pro výpočet kritické rychlosti větru, při které dochází k rezonanci:

$$v_{crit} = 5 \cdot d \cdot f \quad (6.3)$$

Kde: f = vlastní frekvence konstrukce

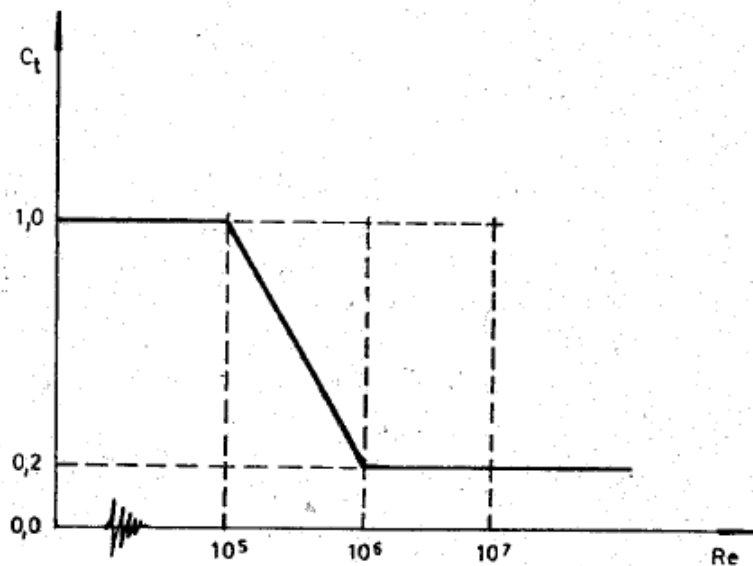
Síly příčné na směr větru vztahené na jednotku délky způsobené Kármánovým kmitáním můžeme přibližně vyjádřit následující rovnicí: [2]

$$P_L(t) = \frac{1}{2} \rho \cdot d \cdot v_{crit}^2 \cdot C_t(t) \quad (6.4)$$

Kde: ρ = hustota větru uvažovaná jako 1,25 kg/m³

$C_t(t)$ = součinitel zdvihu, který se mění harmonicky nebo náhodně a závisí na Reynoldsově čísle.

Následující obrázek ukazuje tento vztah pro C_t úměrné vlastnímu tvaru [24].



Pokud se Kármánovo kmitání bere jako harmonické, lze rovnici (6.4) přepsat ve tvaru:

$$P_L(t) = P_0 \sin(\omega_v t) = \frac{1}{2} \rho \cdot d \cdot v_{crit}^2 \cdot C_t \sin(2\pi f_v t) \quad (6.5)$$

Podle literatury [2] a za předpokladu konstantního větrného profilu je ekvivalentní modální síla od střídání zdvihové síly z rovnice (6.5) dána jako:

$$P(t) = P_L \sin(\omega_v t) = \frac{1}{2} \rho \cdot d \cdot v_{crit}^2 \cdot \sin(2\pi f_v t) \cdot \int_0^H C_t(z) \{\phi(z)\} dz \quad (6.6)$$

Kde: $\phi(z)$ = vlastní tvar ve výšce z

H = celková výška konstrukce

Jak jsme viděli již v kapitole 3, lze dynamickou amplitudu Y při rezonanci zapsat takto:

$$Y = \frac{Y_S}{2\xi} \quad (6.7)$$

Statická deformace Y_S je dána vztahem:

$$Y_S = \frac{P_0}{K} = \frac{P_0}{M\omega^2} \quad (6.8)$$

M je ekvivalentní modální hmota prizmatického prvku daná literaturou [2]:

$$M = \int_0^H m(z) \{\phi(z)\}^2 dz \quad (6.9)$$

Kde: $m(z)$ = hmota na jednotku výšky

Při zkombinování rovnic (6.7) a (6.8) lze maximální odezvu systému s jedním stupněm volnosti zatíženého harmonickým kmitáním napsat jako:

$$Y = \frac{P_L}{M\omega^2} \cdot \frac{1}{2\xi} \quad (6.10)$$

Z toho vyplývá, že pokud je frekvence Kármánova kmitání shodná s vlastní frekvencí konstrukce, maximální amplituda je dána vztahem:

$$Y = \frac{\frac{1}{2} \rho \cdot d \cdot v_{crit}^2 \cdot \int_0^H C_i(z) \{\phi(z)\} dz}{\omega^2 \cdot \int_0^H m(z) \{\phi(z)\}^2 dz} \cdot \frac{1}{2\xi} \quad (6.11)$$

Pokud předpokládáme, že hmota na jednotku výšky je konstantní a součinitel zdvihu je úměrný vlastnímu tvaru, lze rovnici (6.1) zjednodušit:

$$Y = \frac{\rho \cdot d^3 \cdot C_i}{16 \cdot \pi^2 \cdot S^2 \cdot m \cdot \xi} \quad (6.12)$$

Tuto rovnici můžeme použít k prvotnímu odhadu pravděpodobné odezvy konstrukce.

6.2 Kármánovo kmitání v programu Scia Engineer

V programu Scia Engineer je Kármánovo kmitání implementováno podle české zatěžovací normy [24].

Účinek je uvažován pouze v případě, kdy je kritická rychlost vypočtená rovnicí (6.3) mezi minimální a maximální hodnotou. Tyto dvě limitní hodnoty jsou zadány uživatelem. Podle [24] jsou tyto hodnoty brány hodnotami **5 m/s** a **20 m/s**.

Navíc k rovnici (6.11) je v programu možno zadat délku konstrukce, kde se účinky Kármánova kmitání projevují. Pro každý geometrický uzel konstrukce lze vztáhnout délku válce k uzlu. Proto, abychom získali přesné výsledky, musíme konstrukci modelovat s dostatečným počtem *geometrických* uzlů.

Podle výchozího nastavení se efekt projeví na celou výšku konstrukce. Pokud však např. na povrchu komína existují specifické překážky, které brání vzniku vírů, je účinek Kármánova kmitání redukován. V praxi je právě toto prostředkem k potlačení vibrací způsobených víry: připevnění speciálních žeber na povrch válce.

Následující diagram ukazuje kroky potřebné k provedení výpočtu Kármánova kmitání.

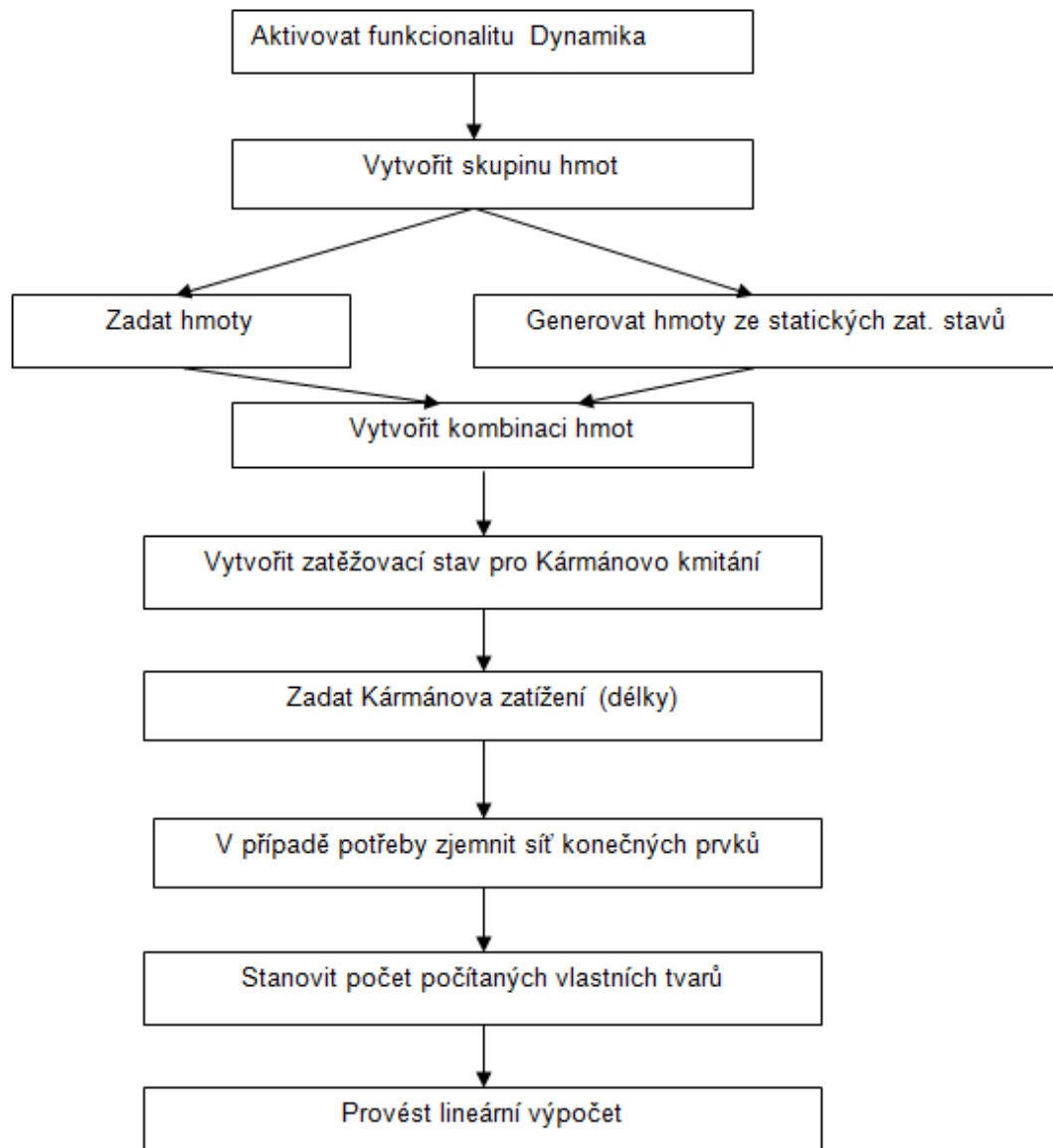


Diagram bude ilustrován v dalším příkladu.

Příklad 14: Vortex_Shedding.esa

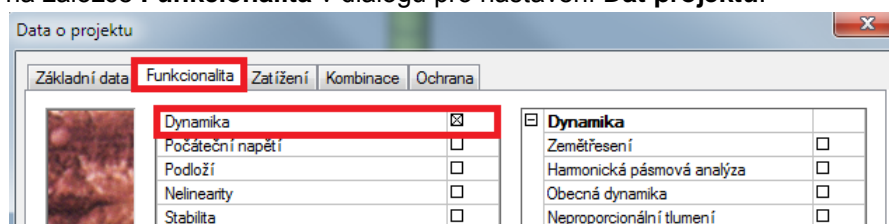
V tomto příkladu budeme modelovat ocelový komín s vetknutou základnou. Vnější průměr komína je **1,2 m** a tloušťka stěny **6 mm**. Celková výška je **30 m** a konstrukce je vyrobena z oceli **S235** podle **EC-EN**. Abychom zohlednili hmotnost izolace, elektrických kabelů a další nekonstrukčních prvků, zadáme spojitou hmotu **55 kg/m**.

Vzniku Kármánova kmitání nebrání žádná speciální konstrukční úprava a proto musí být pro výpočet Kármánova kmitání uvažována celá délka komína.

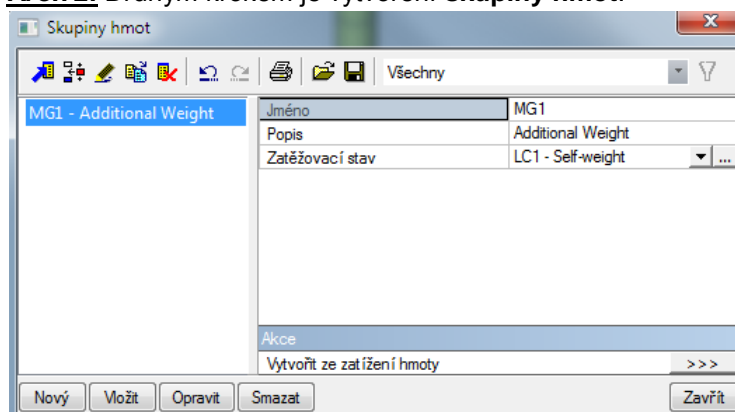
Komín je modelován jako konzola sestávající z 30 prvků, abychom získali dostatečný počet geometrických uzlů. Každému uzlu (s výjimkou základny) bude přiřazena délka komína **1 m**. Logaritmický dekrement komína je zadán hodnotou **0,025**.

Je vytvořen jeden statický zatěžovací stav: **vlastní tíha** konstrukce.

Krok 1: Prvním krokem ve výpočtu Kármánova kmitání je aktivace funkcionality **Dynamika** na záložce **Funkcionalita** v dialogu pro nastavení **Dat projektu**.



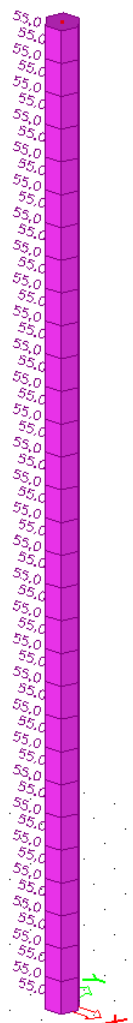
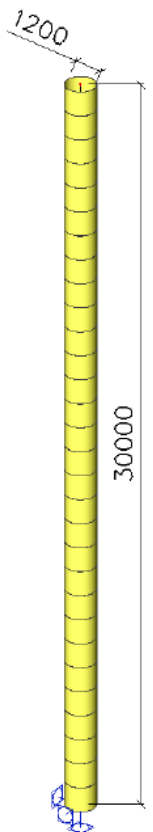
Krok 2: Druhým krokem je vytvoření **skupiny hmot**.

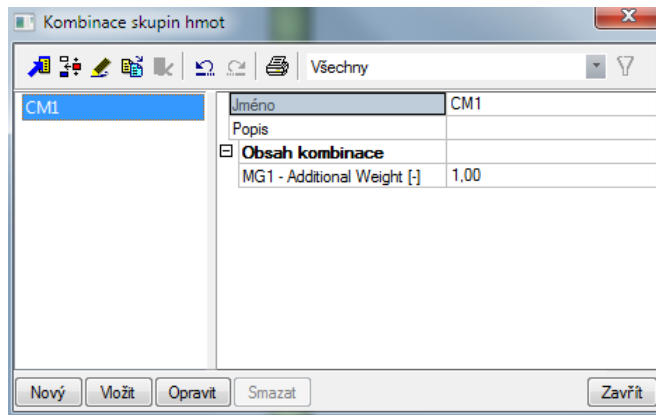


Protože vlastní tíha je zohledněna automaticky, je nutno definovat pouze jednu skupinu hmot: skupinu pro přidanou hmotu.

Krok 3: Po vytvoření skupiny hmot lze na všechny prvky zadat spojitou hmotu **55 kg/m**.

Krok 4: V dalším kroku přidáme skupinu hmot do **kombinace skupin hmot**, kterou využijeme pro definici harmonického zatěžovacího stavu.

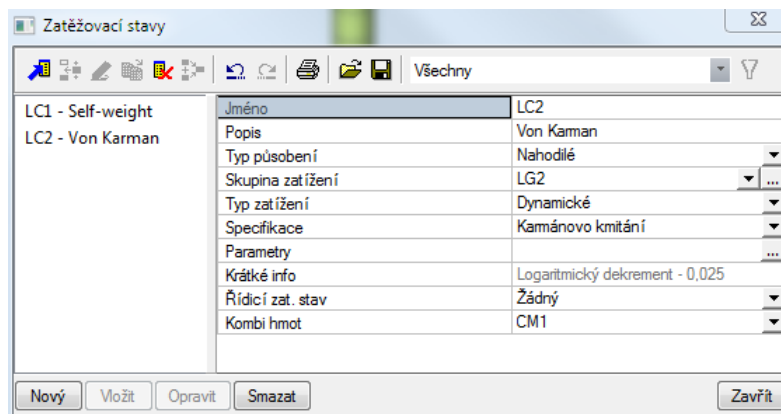




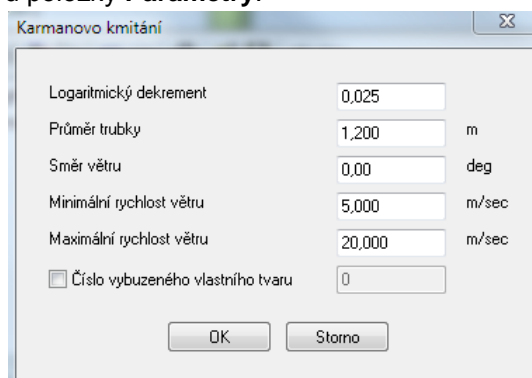
Krok 5: Po vytvoření kombinace hmot, můžeme definovat zatěžovací stav pro Kármánovo kmitání pomocí funkce **Zatěžovací stavy, kombinace > Zatěžovací stavy**.

Typ působení zatěžovacího stavu se nastaví na **Nahodilé**.

Typ zatěžovacího stavu lze pak změnit na **Dynamický**. V položce **Specifikace** nastavíme typ dynamického zatěžovacího stavu na **Kármánovo kmitání**.



Abychom zadali parametry zatěžovacího stavu pro Kármánovo kmitání, použijeme tlačítko **...** u položky **Parametry**.



Logaritmický dekrement je uvažován hodnotou **0,025**.

Průměr trubky je nastaven na **1,2 m**.

Směr větru je definován v globálním souřadném systému. Směr **0,00 deg** znamená globální osu **X**. To značí, že Kármánovo kmitání vznikne ve směru podél osy **Y** (kolmo na směr větru).

Jak bylo uvedeno v odstavci 6.2, **minimální** a **maximální** rychlost větru jsou nastaveny na **5 m/s** a **20 m/s**. Kármánovo kmitání vznikne pouze v případě, že kritická rychlost větru bude mezi těmito dvěma limity.

Volba **Číslo vybuzeného vlastního tvaru** může být použita pro ruční určení toho, pro který vlastní tvar je nutno Kármánovo kmitání počítat. Pokud tyto volba není použita, program sám automaticky určí reprezentativní vlastní tvar.

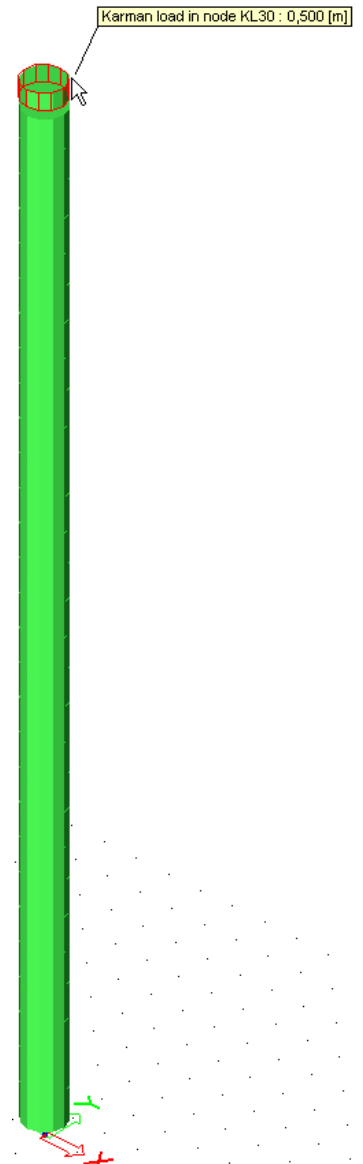
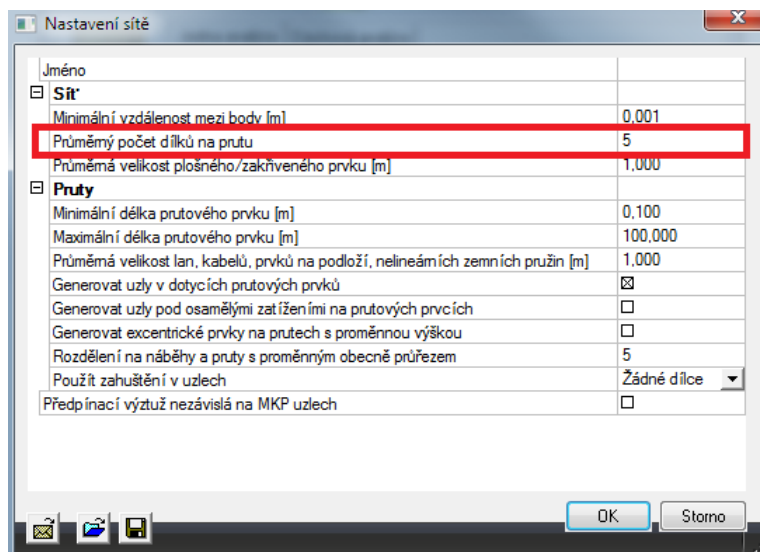
Protože směr větru je nastaven podél globální osy X, bude reprezentativním vlastní tvar podél globální osy Y.

Krok 6: Parametry zatěžovacího stavu byly zadány a proto jedině, co zbývá, je určení délky konstrukce, kde se projeví účinek Kármánova kmitání. Jak bylo již naznačeno v odstavci 6.2, program umožňuje vztáhnout délku komínu ke každému geometrickému uzlu.

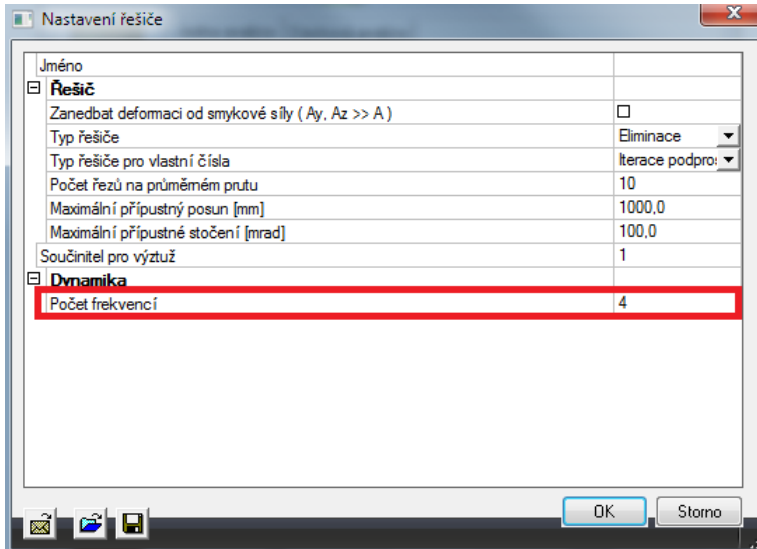
Toto zatížení lze zadat pomocí funkce **Zatížení > Bodová síla > Kármánovo zatížení**.

Protože nejsou přijata žádná speciální opatření, která by zabránila Kármánovu kmitání, a protože komín je zadán pomocí 30 prvků, přiřadíme každému uzlu výšku **1 m**. Hornímu uzlu je přiřazena délka **0,5 m** a uzlu na základně není přiřazena délka žádná, protože tento uzel se kmitání neúčastí.

Krok 7: Pro získání přesných dynamických výpočtů zjemníme síť konečných prvků. **Průměrný počet dílků na prvku 1D** nastavíme na **5** pomocí funkce **Výpočet, síť > Nastavení sítě**.



Krok 8: Posledním krokem před spuštěním výpočtu je nastavení počtu počítaných vlastních tvarů. Výchozí hodnota v dialogu **Výpočet, síť > Nastavení řešiče** je 4. To je pro náš příklad dostačující.



Krok 9: Tím jsme provedli všechny kroky a můžeme spustit **Lineární výpočet** funkcí **Výpočet, síť > Výpočet**.

Protokol o výpočtu pro výpočet **Vlastních frekvencí** obsahuje následující údaje:

Souč. participace tvaru

Režim	Omega	Perioda	Frek. [Hz]	Wxi / Wxtot	Wyi / Wytot	Wzi / Wztot
1	7.4354	0.8450	1.1834	0.6159	0.0000	0.0000
2	7.4354	0.8450	1.1834	0.0000	0.6159	0.0000
3	46.0814	0.1363	7.3341	0.1908	0.0000	0.0000
4	46.0814	0.1363	7.3341	0.0000	0.1908	0.0000
				0.8067	0.8067	0.0000

Podrobnosti o výpočtu Kármánova kmitání lze najít v **protokolu o výpočtu** pro **lineární** výpočet.

Kármánovo kmitání je spočteno pro vlastní tvar 2
 Maximální vodorovný posun 0.02397
 Kritická rychlost 7.10
 Reynoldovo číslo 585346.65
 Poměr Ct 0.57
 Maximální zatížení na válci 21.50
 Redukované zatížení na válci 896.92

Podle očekávání bylo Kármánovo kmitání analyzováno pro druhý vlastní tvar, tedy tvar s největší hmotou kmitající ve směru osy Y.

Maximální a redukované zatížení představují mezivýsledky potřebné k výpočtu sil příčných na směr větru podle [24].

Maximální vodorovné posunutí pro druhý vlastní tvar zobrazíme pomocí funkce **Přemístění uzlů**.

Stejným způsobem zobrazíme celkové přemístění horní hrany komínu způsobené Kármánovým kmitáním:

Přemístění uzlů

Vlastní tvary, Extrém : Globální

Výběr : Vše

Kombinace hmot : CM1/2 - 1,18

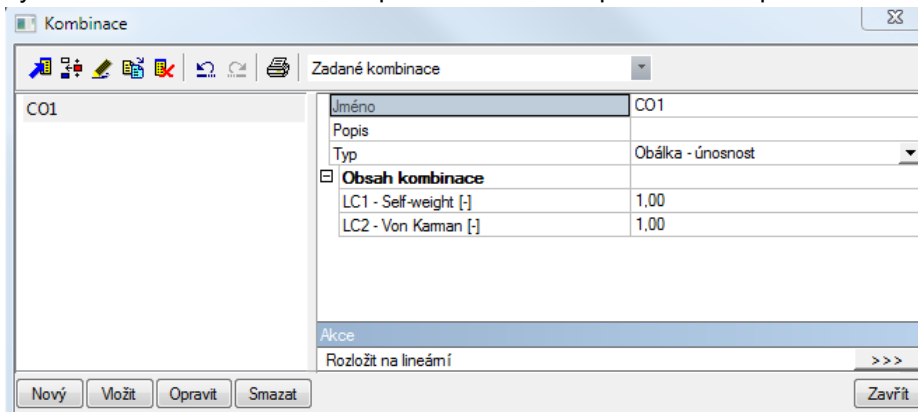
Kvůli lepší numerické interpretaci jsou čísla vynásobena 10000.

Uzel	Stav	Ux [-]	Uy [-]	Uz [-]	Fix [-]	Fiy [-]	Fiz [-]
N1	CM1/2 - 1,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
N31	CM1/2 - 1,18	0,00	-239,69	0,00	10,97	0,00	0,00

Jasně vidíme, že velké posunutí na vrcholu způsobí značná napětí v základně komínu.

Jak bylo uvedeno v kapitole 3, kombinace typu **obálka** může zohlednit obě znaménka amplitudy kmitání, protože kmitání probíhá vždy v obou směrech.

Vytvořená obálková kombinace pro komín umožní posouzení napětí v základně:



Funkce **Napětí v dílcích** pro spodní prvek komínu dává pro tuto kombinaci následující napětí:

Napětí

Lineární výpočet, Extrém : Globální

Výběr : B1

Kombinace : CO1

Prvek	Stav	dx [m]	Normálové - [MPa]	Normálové + [MPa]	Smyk [MPa]	von Mises [MPa]	Únava [MPa]	Kappa [-]
B1	CO1	0,000	-106,0	101,4	2,8	106,0	207,3	-0,96
B1	CO1	1,000	-101,1	96,7	2,8	101,1	197,8	-0,96
B1	CO1	0,800	-102,1	97,6	2,8	102,1	199,7	-0,96

Napětí o velikosti **207,3 MPa** způsobí závažné únavové problémy dokonce již po malém počtu cyklů. To je jeden z nejčastěji uváděných typů porušení v případě Kármánova kmitání.

Řešením problému je připevnění spirálového žebra, které zabrání korelaci vírů a tím sníží délku komínu, kterou je nutno zohlednit při uvažování Kármánova kmitání. Nevýhodou takového žebra je, že zvyšuje odporovou sílu [2].

Protože Kármánovo kmitání je případem rezonance, amplituda závisí na tlumení – jak bylo vysvětleno v kapitole 3. Jiným řešením je proto zvětšení tlumení instalováním vyladěné tlumicí hmoty [23].

Ruční výpočet

Pro kontrolu výsledků spočtených programem provedeme ruční výpočet.

Nejprve přibližně stanovíme vlastní frekvenci komínu pomocí následující rovnice z Eurocode 1 [4]:

$$f = \frac{\varepsilon_l \cdot d}{h_{eff}^2} \sqrt{W_s} \quad (6.13)$$

Kde: $\varepsilon_l = 1000$ pro ocelové komíny

d = průměr komínu na vrcholu [m]

h_{eff} = celková výška komínu pro prizmatickou konzolovou konstrukci [m]

W_s = hmotnost konstrukčních prvků, které přispívají tuhosti komínu, v našem případě vlastní tíha komínu

W_t = celková hmotnost komínu, tedy včetně přídavné hmotnosti.

Vlastní tíhu komínu najdeme ve výkazu materiálu:

Výkaz materiálu

Jméno	Hmotnost [kg]	Povrch [m ²]	Objem [mm ³]
Celkový součet :	5299,2	113,272	6,7505e+08

Průřez	Materiál	Jednotková hmotnost [kg/m]	Délka [m]	Hmotnost [kg]	Povrch [m ²]	Objemová hmotnost [kg/m ³]	Objem [mm ³]
Chimney - Tube (1200; 6)	S 235	176,6	30,000	5299,2	113,272	7850,0	6,7505e+08

$$\Rightarrow f = \frac{1000 \cdot 1,2}{30^2} \sqrt{\frac{176,6}{176,6 + 55}} = 1,16 \text{ Hz}$$

Tento výsledek je dobrou aproximací výsledku **1,18 Hz** spočteného programem.

V dalším kroku ověříme Kármánovo kmitání.

Kritickou rychlost větru, při které dochází k rezonanci, vypočteme pomocí rovnice (6.3):

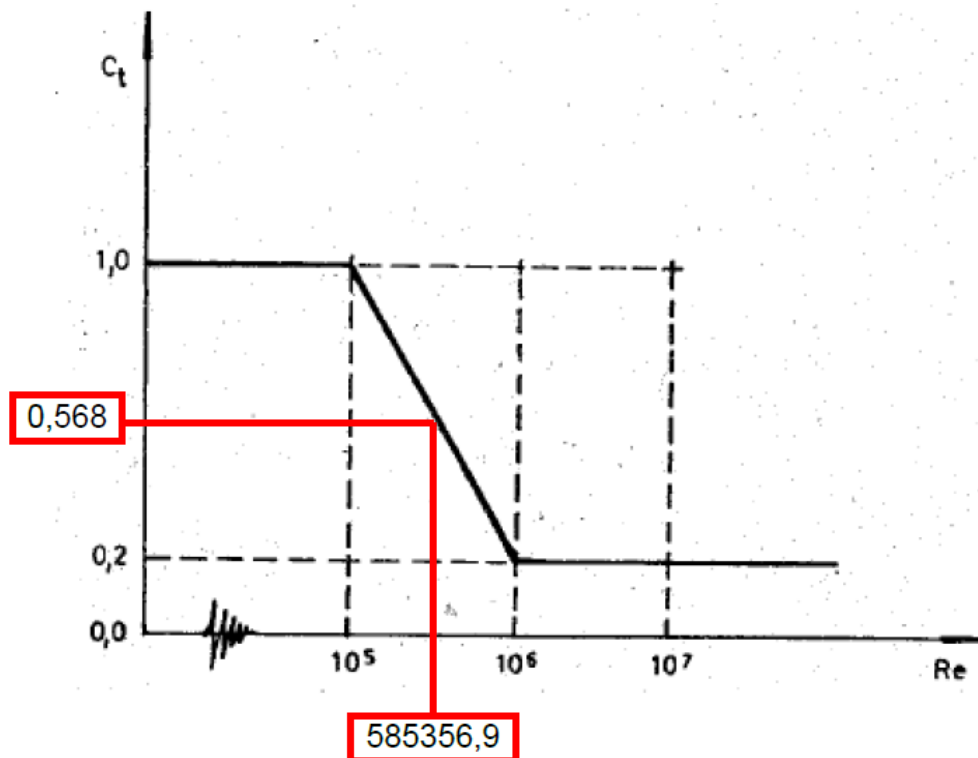
$$v_{crit} = 5 \cdot d \cdot f = 5 \cdot 1,2 \cdot 1,1834 = 7,10 \text{ m/s}$$

Kritická rychlost větru leží mezi spodním a horním limitem **5 m/s** a **20 m/s** a proto pravděpodobně dojde ke Kármánovu kmitání.

Pomocí rovnice (6.2) spočteme Reynoldsovo číslo **Re**:

$$Re = 0,687 \cdot v \cdot d \cdot 10^5 = 0,687 \cdot 7,10 \cdot 1,2 \cdot 10^5 = 585356,98$$

S pomocí Reynoldsova čísla potom spočteme součinitel zdvihu **C_t** :



Tyto výsledky odpovídají hodnotám vypočteným programem.

Pro stanovení přibližné odezvy vrcholu komínu můžeme použít rovnici (6.12):

$$Y = \frac{\rho \cdot d^3 \cdot C_t}{16 \cdot \pi^2 \cdot S^2 \cdot m \cdot \xi}$$

Kde: $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$

$S = 0,2$

$m = 176,6 \text{ kg/m} + 55 \text{ kg/m}$

$\xi = 0,003979$ pro logaritmický dekrement 0,025

$$\Rightarrow Y = \frac{1,25 \cdot 1,2^3 \cdot 0,5686}{16 \cdot \pi^2 \cdot 0,2^2 \cdot (176,6 + 55) \cdot 0,003979} = 0,21099m = \mathbf{210,99mm}$$

Tento výsledek odpovídá výsledku vypočtenému programem.

Eurocode 1 [4] uvádí přibližný vzorec pro výpočet množství cyklů, kterým je komín během Kármánova kmitání vystaven. Ten lze použít při únavové analýze.

Ve stejné literatuře najdeme úpravy rovnic pro skupiny válcových prvků jako komíny a kabely.

7. Odkazy

- [1] Beards F., *Structural Vibration: Analysis and Damping*, Arnold, London, 1996.
- [2] H. Buchholdt, *Structural Dynamics for Engineers*, Thomas Telford Publications, 1997.
- [3] Chopra A., *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [4] Eurocode 1: *Basis of design and actions on structures*, Part 2-4: *Actions on structures - Wind actions*, ENV 1991-2-4, 1995.
- [5] Eurocode 3: *Design of Steel Structures*, Part 1-9: *Fatigue Strength of Steel Structures*, ENV 1993-1-9: 2002.
- [6] Eurocode 8: *Design of structures for earthquake resistance*, Part 1-1: *General rules, seismic actions and rules for buildings*, ENV 1998-1-1, 1994.
- [7] Eurocode 8: *Design of structures for earthquake resistance*, Part 1: *General rules, seismic actions and rules for buildings*, EN 1998-1, 2004.
- [8] Eurocode 8: *Design provisions for earthquake resistance of structures*, Part 6: *Towers, masts and chimneys*, Příloha B, ENV 1998-6, 2003.
- [9] Eurocode 8: *National Application Document for Belgium*, NBN-ENV 1998-1-1, 2002 NAD.
- [10] Murray M., Allen D., Ungar E., *Floor Vibrations due to Human Activity*, AISC, 2003.
- [11] Leijendeckers P.P.H., Fortuin J.B., Van Herwijnen F., Leegwater H., *Polytechnisch zakboekje (Polytechnic pocket notebook)*, 48^e druk, Koninklijke PBNA, 1998 (in Dutch).
- [12] Ghali A., Neville A.M., *Structural Analysis: A unified classical and matrix approach*, Chapman and Hall, London, 1990.
- [13] EPFL-ENAC-SGC, Génie Parasismique, *Quotient de Rayleigh (Rayleigh Quotient)*, Suisse, 2004 (ve francouzštině).
- [14] Xiang Y., Wei G.W., *Exact Solutions for Vibration of Multi-span Rectangular Mindlin Plates*, Journal of Vibration and Acoustics Vol.125, ASME, 2002.
- [15] Whalen T.M., *Course CE573: Structural Dynamics*, Problem 3.10, Purdue University, Indiana, 2004.
- [16] SCIA Group NV, *ESA-Prima Win: Dynamics – Theoretical Background*, Herk-de-Stad, 2002.
- [17] U.S. Army Corps of Engineers, *Engineering and Design - Seismic Design Provisions for Roller Compacted Concrete Dams*, EP 1110-2-12, 1995.
- [18] Wilson E., *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*, CSI, Berkley, 2002.
- [19] ASCE4-98, *Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary*, 2000.
- [20] Chowdhury I., Dasgupta S., *Computation of Rayleigh Damping Coefficients for Large Systems*, EJGE, 2003.
- [21] NF P 06-013, PS92: *Les Règles de la construction Parasismique (Rules for Seismic Structures)*, 1995 (ve francouzštině).
- [22] Vandepitte D., *Berekening van Constructies (Calculation of Structures)*, Story-Scientia, Gent, 1979 (v holandštině). www.berekeningvanconstructies.be
- [23] Transvik P., Alpsten G., *Dynamic Behaviour under Wind Loading of a 90m Steel Chimney*, Report S-01041, 2002.
- [24] Česká norma ČSN 73 0035: *Zatížení konstrukcí*, 1986.
- [25] Vandewalle J., Cools R., *Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde (Linear Algebra and Analytical Geometry)*, Garant, Leuven, 1998 (v holandštině).
- [26] Toratti T., *Seismic Design of Timber Structures*, Tekes, 2001.
- [27] Billah Y., Scanlan R., *Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks*, Am. J. Phys. 59 (2), American Association of Physics Teachers, 1991.
- [28] Lee I., *AE514: Finite Element Methods in Structural Dynamics*, Aero elasticity and Structural Dynamics Lab., Dept. of Aerospace Engineering, Kaist, 2001.

8. Příloha A: Velikost zemětřesení

Pro posouzení síly zemětřesení byla v roce 1930 Charlesem Richterem vyvinuta stupnice popisující energii uvolněnou v průběhu zemětřesení. Tato stupnice se nazývá Richterova stupnice a je nejběžněji dnes používanou stupnicí pro popis zemětřesení [26].

Síla zemětřesení na Richterově stupnici je určena tzv. Wood-Andersonovou seizmografickou maximální amplitudou, kde $M = \log(a)$ a „a“ je maximální amplituda [μm] ve vzdálenosti 100 km od epicentra.

Seizmické účinky na budovy nelze Richterovou stupnicí popsat a tato stupnice ani nesmí být použita pro návrh budov. V roce 1970 však George Housner odvodil empirický vztah mezi magnitudou, dobou trvání a největším zrychlením, které se použije při návrhu:

Magnitude on the Richter scale	Peak ground acceleration (% g)	Duration (s)
5.0	9	2
5.5	15	6
6.0	22	12
6.5	29	18
7.0	37	24
7.5	45	30
8.0	50	34
8.5	50	37

9. Příloha B: Numerické hodnoty tlumení

V této příloze jsou uvedeny některé číselné hodnoty konstrukčního tlumení.

A. EC 8 – část 6 (ENV 1998-6:2003 příloha B) navrhuje následující hodnoty koeficientu tlumení:

Konstrukční materiál	Koeficient tlumení ξ
Ocelové prvky	1% - 4%
Betonové prvky	2% - 7%
Keramický obklad	1.5% - 5%
Vyzdívka z cihel	3% - 10%

B. Jiné hodnoty tlumení navrhuje EC1 – část 2-4 (ENV 1991-2-4:1995 příloha C):

Základní *logaritmický dekrement* d se stanoví:

$$d = d_s + d_a + d_d$$

Kde:

d_s : základní konstrukční tlumení

d_a : základní aerodynamické tlumení

d_d : základní tlumení od speciálních zařízení

Konstrukční tlumení je:

$$\begin{cases} d_s = a_1 \times n_1 + b_1 \\ d_s \geq \delta_{\min} \end{cases}$$

Kde:

n_1 : základní ohybová frekvence,

a_1, b_1, δ_{\min} : parametry uvedené v následující tabulce pro různé konstrukční typy.

Konstrukční typ		a_1	b_1	δ_{\min}
železobetonové konstrukce		0.045	0.030	0.080
ocelové budovy		0.045	0	0.050
spřažené konstrukce: beton + ocel		0.080	0	0.080
železobetonové stožáry		0.050	0	0.025
příhradové ocelové stožáry		0	0.030	0
železobetonové komíny		0.075	0	0.030
předpjaté ocelové kabely		0	0.010	0
ocelové svařené potrubí bez vložky		0	0.015	0
ocelové potrubí s jednou vložkou nebo izolací		0	0.025	0
ocelové potrubí se dvěma nebo více vložkami		0	0.030	0
ocelové potrubí s vyzdívkou z cihel		0	0.070	0
spárované potrubí bez vložek		0	0.015	0
zavěšené ocelové potrubí bez vložky		0	0.040	0
ocelové mosty	svařované	0	0.020	0
	s vysokopevnostními šrouby	0	0.030	0
	s obyčejnými šrouby	0	0.050	0
betonové mosty	předpjaté bez trhlin	0	0.040	0
	s trhlinami	0	0.100	0
mostní kabely	rovnoběžné kabely	0	0.006	0
	spirálové kabely	0	0.020	0

Například pro ocelovou budovu s první vlastní frekvencí 3 Hz je logaritmický dekrement:

$$0.45 \cdot 3 + 0 = 0.135 (> 0.05)$$

C. Další hodnoty *logaritmického dekrementu* jsou navrženy ve [22]:

Konstrukční materiál	Logaritmický dekrement
ocel (svařovaná)	0,025
železobeton a předpjatý beton	0,056
zdivo	0,25
dřevo	0,13

V tomto odkazu lze také nalézt vzorce pro aerodynamické tlumení a pro tlumení od základů.